

ANÁLISIS COMBINATORIO Y TEORÍA DE PROBABILIDADES

ES

ARITMÉTICA

*Teoría y
Problemas*



Editorial
CUZCAN

Apoyados por la Dirección de la Ciencia y la Tecnología

JAVIER TASAICO CASAS

DEDICATORIA

A mis padres

José y Corina

y a mis hijas

Francis

Dalia y

Aurys

A M.

*"... porque cada día
y todos los días
existe algo que aprender
y también mucho que enseñar"*

J

www.elsolucionario.org

free online eBooks and Solutions Manual
can be found at www.elsolucionario.org

INDICE

	Pág
ANÁLISIS COMBINATORIO	9
♦ INTRODUCCIÓN	9
1. Sumatoria	9
2. Productoria	11
3. Factorial de un Número	12
Propiedades	
♦ PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CONTEO	15
1. Principio de Adición	16
2. Principio de Multiplicación	20
♦ MÉTODOS DE CONTEO	23
1. Permutación	24
2. Permutación Circular	26
3. Permutación con Repetición	28
4. Combinación	29
TEORÍA DE LA PROBABILIDAD	32
♦ I. CÁLCULO DE PROBABILIDADES	32
1. Experimento Aleatorio ($\mathcal{E}$)	32
2. Espacio Muestral (Ω)	33
3. Evento	35
♦ II. DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD	36
Eventos Mutuamente Excluyentes	38
Eventos Independientes	39
♦ III. AXIOMAS Y TEOREMAS DE LA PROBABILIDAD	42
Ejercicios	42
ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS RESUELTOS	50
SOLUCIONARIO	65
ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS	110
CLAVES DE RESPUESTAS	128

ANÁLISIS COMBINATORIO

Parte de la matemática que comprende el estudio de los diferentes arreglos o agrupaciones que se pueden formar con un cierto número de objetos.

I. INTRODUCCIÓN

Para analizar los diferentes casos que se presentan en el análisis combinatorio es conveniente señalar algunas definiciones que son utilizadas en los casos que vamos a estudiar.

1. SUMATORIA

Al sumar ciertas expresiones, éstas se pueden representar utilizando la notación de sumatoria, en tales casos se usa el símbolo $\sum$ (letra griega sigma mayúscula) y leeremos "Suma de".



Ejemplo :

$$\sum_{i=1}^3 t_i = t_1 + t_2 + t_3$$

Se trata de la suma de los t_i desde el índice igual a 1 hasta el índice igual a 3.

Donde :

i : índice de la sumatoria.

t_i : término de lugar i .

En esta notación, la parte inferior indica el primer valor que toma el índice i y la parte superior señala el último valor del índice.

$$\sum_{i=1}^n t_i = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n$$

$\downarrow$ Valor inicial ($i = 1$) $\downarrow$ Valor final ($i = n$)

☐ Ejemplos :

1. $\sum_{i=1}^3 i = 1 + 2 + 3$

2. $\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

3. $\sum_{k=2}^5 (k+5) = 7 + 8 + 9 + 10$

4. $\sum_{j=2}^5 2j = 2(2) + 2(3) + 2(4) + 2(5)$

Observación

La letra que representa al índice (i, j, k etc.) puede variar, pero en cada caso debe señalar la forma que posee los sumandos en la sumatoria indicada.

Sumatorias Importantes

a. $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b. $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c. $\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

☐ Ejemplo :

Según las sumatorias indicadas se puede conocer los siguientes valores :

a. $\sum_{k=1}^5 k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$

b. $\sum_{j=1}^8 j = 1 + 2 + 3 + \dots + 8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$

c. $\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$

2. PRODUCTORIA

Similar a la sumatoria, se utiliza al multiplicar ciertas expresiones, utilizando el símbolo $\prod$ (letra griega Pi, mayúscula) y se lee "Producto de".

☐ Ejemplo :

Donde :

i : índice de la productoria

t_i : término de lugar i

$$\prod_{i=1}^3 t_i = t_1 \cdot t_2 \cdot t_3$$

Esto es el producto de los t_i desde el índice igual a 1 hasta el índice igual a 3.

La notación de productoria también usa un índice, en la parte inferior señala donde empieza y en la parte superior donde acaba.

$$\prod_{i=1}^n t_i = t_1 \times t_2 \times t_3 \times \dots \times t_n$$

$\downarrow$ Valor inicial ($i = 1$) $\downarrow$ Valor final ($i = n$)

Tanto la notación de sumatoria, como de productoria sirven para representar expresiones en forma abreviada ya que de otro modo podría resultar extenso y/o complejo.

☐ Ejemplos :

$$\sum_{k=1}^{20} (2k+3)^2 = 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots + 43^2$$

$$\sum_{k=0}^{100} (3k+1)^k = 1^0 + 4^1 + 7^2 + \dots + 301^{100}$$

$$\prod_{k=5}^{10} \left(\frac{3k-1}{k^2} \right) = \left(\frac{14}{5^2} \right) \times \left(\frac{17}{6^2} \right) \times \left(\frac{20}{7^2} \right) \times \dots \times \left(\frac{29}{10^2} \right)$$

☐ Ejemplos :

Cuando un valor numérico aparece en una sumatoria, este valor puede salir fuera de la sumatoria, sin afectar el resultado.

a. $\sum_{k=1}^5 (2k) = 2 \sum_{k=1}^5 k = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 2 \left(\frac{5 \cdot 6}{2} \right) = 30$

b. $\sum_{k=1}^6 (108k) = 108 \sum_{k=1}^6 k = 108(1 + 2 + \dots + 6) = 108 \left(\frac{6 \cdot 7}{2} \right) = 2268$

3. FACTORIAL DE UN NÚMERO

El factorial de un número entero y positivo n , denotado por $n!$ ó $|n$, es el producto de todos los números enteros y consecutivos desde la unidad hasta el valor de n inclusive.

☐ Ejemplo:

$$\text{Factorial de } 3 = 3! = |3| = 1 \times 2 \times 3$$

$$\text{Factorial de } 7 = 7! = |7| = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$$

$$\text{Factorial de } 30 = 30! = |30| = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 29 \times 30$$

En general, sea n entero y positivo

$$\text{Factorial de } n = n! = |n| = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n-1) \times n$$

☐ Ejemplos:

Los valores indicados pueden ser calculados

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

$$\frac{5!}{3!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 4 \times 5 = 20$$

$$\frac{12!}{9!3!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 9 \times 10 \times 11 \times 12}{(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 9) \times (1 \times 2 \times 3)} = \frac{10 \times 11 \times 12}{1 \times 2 \times 3} = 220$$

OBSERVACIONES:

(*) El valor del factorial de un número, sólo está definido para valores enteros y positivos.

$(-4)! no está definido, no existe$; $(3/2)! no está definido, no existe.$

Veáse la diferencia con otras expresiones que involucran factoriales y si están definidas.

$$-4! = -(1 \times 2 \times 3 \times 4) = -24$$

$$\frac{3!}{2} = \frac{1 \times 2 \times 3}{2} = 3$$

(*) Por convención se considera: $0! = 1$

(*) En los diferentes problemas y aplicaciones es recomendable recordar la siguiente tabla:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

$$7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$$

$$8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40320$$

PROPIEDADES

(i) El factorial de un número entero y positivo, es igual al producto de dicho número por el factorial del consecutivo inferior al número señalado.

$$\text{Veamos : } 6! = 6 \times (5!)$$

$$20! = 20 \times (19!)$$

$$147! = 147 \times (146!)$$

En general, para todo n entero y positivo,

$$n! = n \times (n-1)!$$

☐ Ejemplo:

$$\text{Derivado de lo anterior: } 6! = 6 \times 5! = 6 \times 5 \times 4!$$

$$20! = 20 \times 19! = 20 \times 19 \times 18 \times 17!$$

$$1028! = 1028 \times 1027 \times 1026 \times 1025!$$

$$(2a)! = (2a) \times (2a-1)!$$

En esta última expresión, del momento que se plantea factorial de $2a$, se admite que este valor es entero positivo.

$$\Rightarrow (2a) \in \mathbb{Z}^+$$

$$(m+n)! = (m+n) \times (m+n-1) \Rightarrow (m+n) \in \mathbb{Z}^+$$

➤ Ejercicio:

$$\text{Halle el valor de: } A = \frac{5! \times 20!}{19! \times 6!}$$

Resolución:

Si se encuentra factoriales de valores cercanos ¡Poner atención! Buscar expresar el mayor como el factorial del menor multiplicado por valores enteros.

$$\text{Veamos : } 20! = 20 \times 19! \quad (\text{según propiedad})$$

$$\text{Reemplazamos: } A = \frac{5! \times 20 \times 19!}{19! \times 6!} = \frac{5! \times 20}{6!}$$

$$\text{Similar: } 6! = 6 \times 5!$$

$$\text{Reemplazamos: } A = \frac{5! \times 20}{6 \times 5!} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

Ejercicio :

Halle el valor de : $B = \frac{17! \times 19! \times 21! \times 19}{(20!)^3}$

Resolución :

Según se conoce : $21! = 21 \times 20!$

$20! = 20 \times 19!$

$20! = 20 \times 19 \times 18 \times 17!$

Reemplazamos :

$$B = \frac{17! \times 19! \times 21! \times 19}{20! \times 20! \times 20!} = \frac{17! \times 19! \times 21! \times 19}{20! \times 20 \times 19 \times 18 \times 17! \times 20 \times 19!}$$

$$B = \frac{21}{20 \times 18 \times 20} = \frac{7}{2400}$$

(ii) Para dos números a y b enteros y positivos

Si $a! = b! \Rightarrow a = b$

Ejemplo :

Si : $8! = (2a+4)!$ se cumple : $8 = 2a+4$

resolviendo : $a = 2$

Si : $(n+5)! = 3!$ se cumple : $n+5 = 3$

resolviendo : $n = -2$

Recordar que el entero positivo es $n+5$, luego n puede ser negativo, como este caso.

Si : $(3a)! = 24$

Según la tabla de factoriales : $24 = 4!$

Luego : $(3a)! = 4!$ de donde : $3a = 4$

se obtiene : $a = 4/3$

en este caso el entero positivo es $3a$.

OBSERVACIÓN :

Hay que recordar que : $0! = 1! = 1$ es el único caso en que el factorial de dos números diferentes es el mismo.

Entonces, si se tuviera : $a! = b! = 1$

Podría ser que : $a = b = 0$ ambos iguales a cero

$a = b = 1$ ambos iguales a 1

$a = 0$, $b = 1$ } uno es cero

$a = 1$, $b = 0$ } y el otro es uno

Si : $(a-2)! = 1$ { Podría ser $a-2 = 0$ donde $a = 2$
Podría ser $a-2 = 1$ donde $a = 3$

II. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CONTEO

En determinados problemas, se observa que una operación (o actividad) aparece en forma repetitiva y es necesario entonces conocer la cantidad de formas o maneras que se pueda realizar dicha operación. Para tales casos es útil conocer determinadas técnicas de conteo que facilitaran el cálculo señalado y será el medio adecuado para resolver estos problemas.

El análisis combinatorio es lo que puede llamarse una forma abreviada de contar.

Las operaciones o actividades que se presentan serán designadas como eventos.

Ejemplo

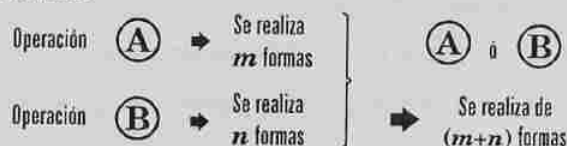
1. Señalar las prendas que utiliza una persona para vestirse.
2. Ordenar 7 objetos en 10 casilleros.
3. Escribir una palabra de 6 letras utilizando 4 consonantes y 2 vocales señaladas.
4. El pintar un dibujo de 2 figuras, con 5 colores posibles.
5. Designar 2 delegados de 50 personas.
6. Elegir un camino de 10 posibles.

Estas operaciones que señalamos, pueden efectuarse de una o varias maneras, para encontrar la cantidad de formas, se utilizará dos principios fundamentales de conteo :

1. Principio de Adición.
2. Principio de Multiplicación.

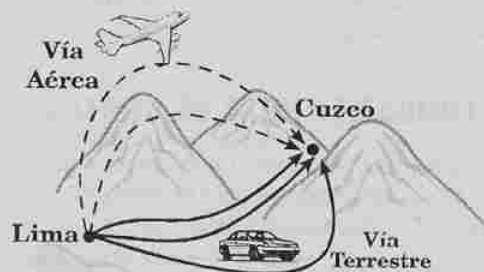
1. PRINCIPIO DE ADICIÓN

Si una operación o actividad **A**, puede realizarse de **m** maneras diferentes y otra operación o actividad **B** se realiza de **n** formas diferentes, entonces la operación que consiste en hacer **A** ó **B** (no ambas simultáneamente, sino la una o la otra) podrá ocurrir de $(m + n)$ formas distintas.



➤ Ejercicio

Una persona puede viajar de Lima a Cuzco por vía aérea, usando 2 líneas de transporte aéreo ó por vía terrestre, a través de 3 líneas de ómnibus. ¿De cuántas formas puede realizar el viaje de Lima a Cuzco?



Resolución :

Según el enunciado la persona puede viajar de Lima a Cuzco de las siguientes formas :

- Por vía terrestre, y ya no utiliza la vía aérea, ó
- Por vía aérea, y no utiliza la terrestre.

Nótese que al utilizar una, deja de utilizar la otra, no se realizan simultáneamente.

Por el principio de adición :

Por vía aérea : 2 formas
Por vía terrestre : 3 formas

Se podrá ir por vía aérea ó terrestre de $(2 + 3) = 5$ formas

El esquema respectivo :



Nota :

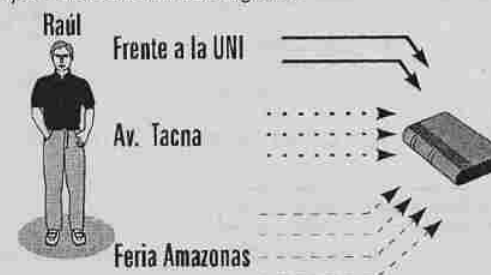
Este principio se puede utilizar para más de dos operaciones, siempre que se pueda hacer una u otra pero no todas simultáneamente. Estas operaciones son llamadas mutuamente excluyentes.

➤ Ejercicio :

Raúl desea comprar un libro de Aritmética que es vendido en 3 lugares distintos : frente a la UNI en 2 puestos de venta; en la Avenida Tacna en 3 librerías y en la feria de libros Amazonas en 4 kioscos diferentes. ¿De cuántas maneras puede obtener el libro de aritmética?

Resolución

Comprendemos que si Raúl compra el libro en uno de los tres lugares nombrados, no necesitará comprar de los otros dos lugares.



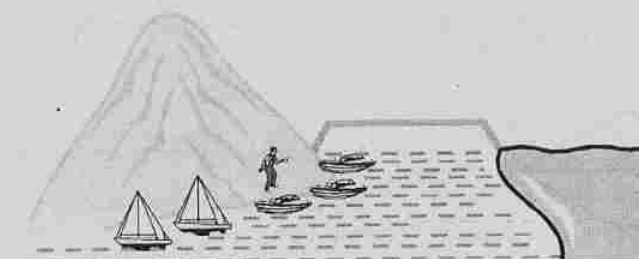
Por el principio de adición :

$$\begin{matrix} (2) \\ \text{UNI} \end{matrix} + \begin{matrix} (3) \\ \text{TACNA} \end{matrix} + \begin{matrix} (4) \\ \text{AMAZONAS} \end{matrix} = 9 \text{ formas diferentes}$$

➤ Ejercicio :

Alfonso desea cruzar un río, para ello puede utilizar 2 botes, 3 lanchas pequeñas o un deslizador. ¿De cuántas formas podrá cruzar el río utilizando uno de los medios de transporte señalados?

Resolución :



Puede utilizar

2 botes (2 formas)

3 lanchas (3 formas)

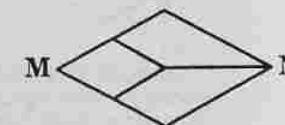
1 deslizador (1 forma)

Al usar una, no necesita utilizar las otras, luego por el principio de adición

$$\text{Total de formas : } 2 + 3 + 1 = 6 \text{ formas posibles}$$

➤ Ejercicio :

¿De cuántas formas se podrá ir de M a N sin retroceder? Cada línea representa un camino.



Resolución:

Hagamos el desarrollo del problema tomando una parte del gráfico.

(i) Partiendo de M, llegar a C

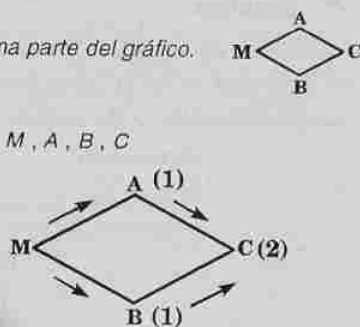
señalamos los vértices del cuadrilátero con M, A, B, C

de M a A hay un sólo camino

de M a B hay un sólo camino

de M a C hay 2 caminos

(MAC ó MBC)



Se indica en paréntesis, la cantidad de caminos (formas) para llegar a los vértices indicados.

ii. Partiendo de M llegar a N

indicados los caminos en los puntos anteriores, se

puede observar que para llegar a D, partiendo

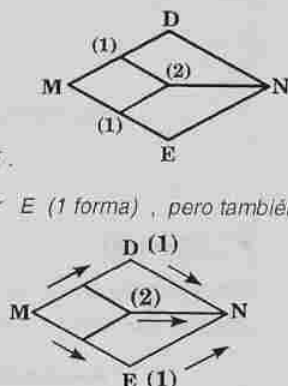
de M hay un sólo camino, lo mismo sucede para E.

Para llegar a N se puede llegar por D (1 forma) o por E (1 forma), pero también por la parte central y aquí se está llegando de 2 formas.

Según el principio de adición se

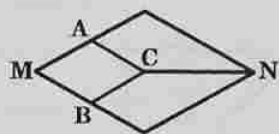
tendrá $1 + 1 + 2 = 4$ formas

(D) (E) (C)

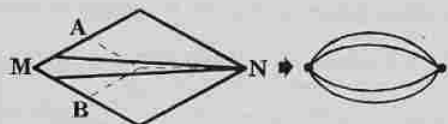


* Otra forma de resolver lo anterior es buscar un esquema más simple de lo indicado.

Se tiene:



Si los puntos A y B se acercan más al punto M y el punto C se acerca a N, se obtendría

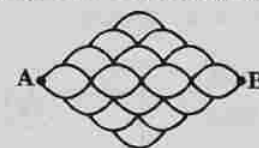


El esquema planteado sería más sencillo y se observa los 4 caminos fácilmente.

La diferencia para resolver este tipo de esquema, reside en poder encontrar la forma más sencilla y contar los caminos fácilmente. De no ser así, se buscará contar los caminos, indicando en cada punto la cantidad de formas de llegar hasta él.

Ejemplo:

Si se tuviera que contar las posibles formas para llegar de A hasta B sin retroceder según la figura.



Podría parecer en un instante algo complicado, pero debe de buscarse algún equivalente que sea más fácil de utilizar.

Así podría tomarse:

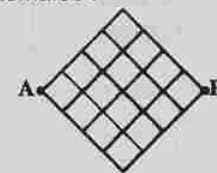


Figura 1

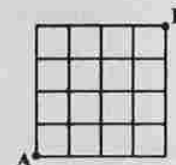
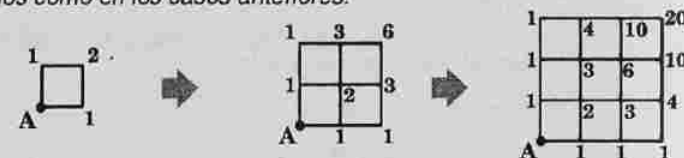
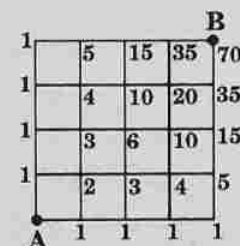


Figura 2

Ambas figuras (1 y 2) son equivalentes a la original, tomamos la figura 2 y contamos como en los casos anteriores.



Finalmente:



Para llegar de A a B habrá 70 formas.

Ejercicio propuesto:

Señale la cantidad de formas para llegar a B partiendo de A, sin retroceder ni pasar por el mismo camino.

a)



b)



c)

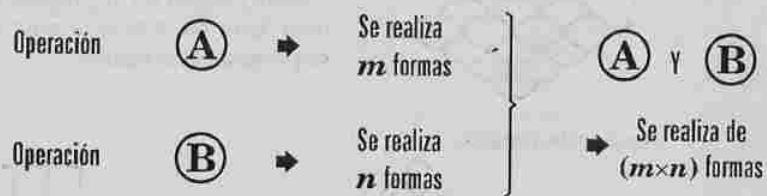


d)



2. PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN (Principio fundamental)

Si una operación o actividad **A** puede efectuarse de **m** maneras diferentes y cuando ha sido efectuada por cualquiera de esas maneras se realiza otra operación o actividad **B** que puede efectuarse de **n** maneras diferentes, entonces ambas operaciones o actividades podrán efectuarse de $(m \times n)$ maneras distintas.



Ejercicio

José tiene 2 polos distintos y 3 pantalones diferentes. ¿De cuántas maneras distintas puede vestirse utilizando dichas prendas?

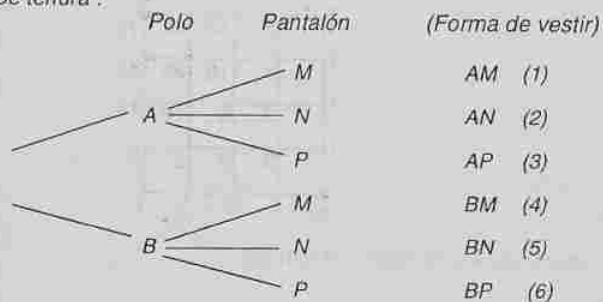
Resolución

Un diagrama conocido como "diagrama árbol" por su apariencia, se emplea para mostrar los diferentes casos que se presentan.

Sean los polos **A**, **B**

los pantalones **M**, **N**, **P**

Se tendrá:



Nótese que al elegir un polo, también se elige un pantalón, luego ambas actividades se deben de realizar

Para el ejemplo, por el principio de multiplicación

(Elige un polo)

↓
2

(Elige un pantalón)

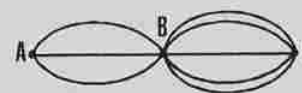
↓
3

Formas de vestirse
(con polo y pantalón) = $2 \times 3 = 6$ formas

Ejercicio:

¿De cuántas maneras distintas se puede ir de **A** a **C** sin volver a recorrer un mismo camino?

Resolución



Según el esquema mostrado, para llegar a **C** hay que pasar por **B** necesariamente, esto es, que al recorrer el camino de **A** a **B**, también hay que recorrer el de **B** a **C**, luego:

De **A** a **B** hay 3 caminos

De **B** a **C** hay 4 caminos

Según el principio de multiplicación se tendrá:

$$3 \times 4 = 12 \text{ formas para llegar a C de A}$$

Nota:

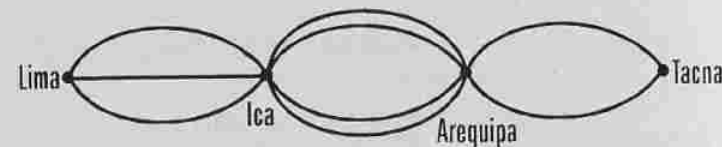
Este principio puede ser utilizado para más de 2 operaciones considerando que cada uno debe de ocurrir, así se haya efectuado otro.

Ejercicio:

Para ir de Lima a Ica hay 3 líneas de ómnibus diferentes, para ir de Ica a Arequipa hay 4 líneas de transporte y para llegar a Tacna de Arequipa existen 2 líneas. ¿De cuántas maneras puede ir una persona de Lima a Tacna pasando por Ica y Arequipa?

Resolución:

Señalando el siguiente esquema:



Como hay que ir de Lima a Tacna, pasando por Ica y Arequipa, deben de hacerse los siguientes tramos:

Lima - Ica	⇒	3 formas
Ica - Arequipa	⇒	4 formas
Arequipa - Tacna	⇒	2 formas

Repetimos: Cada tramo debe hacerse necesariamente, luego, por el principio de multiplicación, se tendrá $3 \times 4 \times 2 = 24$ formas para llegar de Lima a Tacna.

➤ **Ejercicio :**

Silvia tiene 3 blusas diferentes, 2 pantalones distintos y 2 pares de zapatillas de diferente modelo. ¿De cuántas formas distintas puede vestirse usando dichos artículos?.

Resolución :

Observe que al utilizar alguna blusa, también debe de usar pantalón y lo mismo con las zapatillas. Luego las 3 actividades deben realizarse. Por el principio de multiplicación:

$$(3) \times (2) \times (2) = 12 \text{ formas de vestir}$$

Blusas Pantalones Pares de zapatillas

➤ **Ejercicio propuesto :**

Carlos y Juan asisten a una reunión y encuentran 3 asientos vacíos. ¿De cuántas formas diferentes podrán ubicarse en los asientos?

□ **Ejemplo :**

¿De cuántas formas diferentes se podrá elegir :

- Una pelota de fútbol y otra de baloncesto si de la primera hay 5 marcas diferentes y de la segunda hay 2 marcas diferentes.
- Dos cuadernos: uno de 50 hojas y el otro de 100 hojas, además de un libro, si se puede elegir de 3 cuadernos de 50 hojas, 2 cuadernos de 100 hojas y 2 libros.
- Una pareja de jóvenes formado por un muchacho y una chica, si se encuentran 3 muchachos y 5 chicas.
- Un almuerzo formado por sopa y segundo, de un menú de 4 sopas y 8 segundos.
- La hora y el cine para ver una película que se estrena en 4 salas a las 3 p.m., 6 p.m. y 9 p.m.
- Una gaseosa y una cerveza, si hay disponible 5 gaseosas y 6 cervezas.
- El día y la playa para pasar el fin de semana si puede escoger de 5 balnearios y salir sábado o domingo.

III. MÉTODOS DE CONTEO

En diferentes casos, se tomará de algún conjunto parte de sus elementos o todos ellos, para formar diferentes agrupaciones, que se van a distinguir por el orden en que están colocados dichos elementos o por la naturaleza de alguno de ellos. Si los elementos que forman una agrupación son diferentes entre sí, serán llamadas agrupaciones sin repetición y si algunos de ellos son iguales se dirá que son agrupaciones con repetición.

□ **Ejemplo :**

Veamos el caso que se tenga dos objetos en un maletín, digamos un libro y una pelota.

Resolución :



Dichos objetos contenidos en el maletín, forman una agrupación de elementos diferentes.

Pero si los colocamos sobre la mesa, podemos ordenarlos de 2 formas :

1ª Forma



Pelota a la izquierda
cuaderno a la derecha

2ª Forma



Cuaderno a la izquierda
pelota a la derecha

Se observa que las formas de ordenar dichos objetos dependen de la posición que tienen, estas agrupaciones donde se considera el orden, son denominados arreglos u ordenaciones.

Nótese la diferencia de los objetos en el maletín y ordenados.

□ **Ejemplo :**

Señalemos tres objetos y veamos las diferentes ordenaciones que se pueden realizar.

A los objetos anteriores



, le agregamos un vaso

Este nuevo objeto puede ser colocado, adelante, al medio o detrás de los objetos anteriores.



(I)



(II)



(III)

Pero no se debe olvidar que los 2 objetos iniciales también pueden ordenarse de otra forma



En total se formarían 6 ordenaciones diferentes

Podríamos señalar lo siguiente :

Para 1 objeto, sólo hay una forma de colocarlo

Para 2 objetos, hay $2 \times 1 = 2$ formas de ordenar

Para 3 objetos, hay $3 \times 2 \times 1 = 6$ formas de ordenar

¿Para 4 objetos? El cuarto objeto podría situarse adelante, entre los dos primeros, entre los dos últimos o detrás de los 3 iniciales, es decir de 4 maneras diferentes, para cada una de las 6 formas anteriores, se tendría:

$$4 \times (3 \times 2 \times 1) = 24 \text{ formas}$$

1. PERMUTACIÓN

Se llama así a un arreglo u ordenación de todos o parte de los elementos de un conjunto considerando el orden en que se encuentran.

Permutaciones de A y B : AB ó BA $\Rightarrow$ 2 permutaciones

Permutaciones de A, B y C : ABC, BCA, CAB, ACB, BAC, CBA } 6 permutaciones

Para n objetos diferentes, el número de permutaciones, representado como P_n , que se puede obtener con los n objetos está dado por:

$$P_n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n! \quad n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

¿Cuántas permutaciones pueden formarse con letras a, b, c y d?

Según lo señalado, el número de permutaciones de 4 elementos diferentes, denotado por P_4 , está dado por: $P_4 = 4! = 24$

Se obtendrá 24 permutaciones posibles.

Ejemplo :

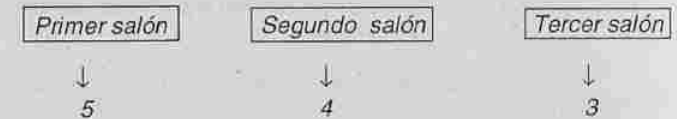
Un director de colegio, inspecciona 5 salones de clase diferentes; para observar a los profesores sin que estos sepan en que momento lo hará, varía el orden de las inspecciones. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

Se busca conocer de cuántas formas observará los salones variando el orden, y esto está dado por :

$$P_5 = 5! = 120$$

Del ejemplo anterior, si el director sólo puede visitar 3 de los 5 salones, por razones de tiempo. ¿De cuántas formas podrá hacerlo ?

Hagamos el siguiente esquema:



El primer salón puede elegirlo de cualquiera de los 5, el segundo salón podrá elegirlo de los 4 que han quedado y el tercero, de sólo 3 que no han sido inspeccionados.

$$\text{El número de permutaciones} = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ formas}$$

En este caso, las permutaciones se forman con una parte de los elementos del conjunto.

El número de permutaciones de n objetos, tomados en grupos de k elementos (siendo $k \leq n$) y denotado como P_k^n , estará dado por:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Donde: $n, k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k \leq n$

Estas permutaciones son llamadas lineales, porque los objetos son ordenados en una línea de referencia.

Ejemplo :

¿Cuántas permutaciones diferentes de 3 letras cada una pueden formarse con las letras A, B, C, D, E y F ?

Se trata de 6 elementos (A, B, C, D, E, F) ordenados de 3 en 3, está dado por :

$$P_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

☐ Ejemplo :

En una carrera de 100 metros, participan 10 atletas. ¿De cuántas formas distintas podrán ser premiados los tres primeros con medallas de oro, plata y bronce?

Se buscará las diferentes temas (grupos de 3) que se puede formar con 10 elementos :

$$P_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

☐ Ejemplo :

¿De cuántas maneras pueden 8 personas sentarse en una banca si sólo hay 4 asientos disponibles?

Las personas podrán sentarse de P_4^8 maneras diferentes, donde :

$$P_4^8 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$$

2. PERMUTACION CIRCULAR

Es un arreglo que se puede hacer con los elementos de un conjunto alrededor de un objeto (o centro) señalado.

El número de permutaciones circulares, denotado como P_c , de n elementos, está dado por :

$$P_c(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}$$

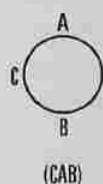
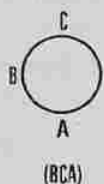
☐ Ejemplo :

¿De cuántas maneras se podrá ordenar 3 objetos alrededor de una mesa redonda.

Si los objetos fueran A, B, C las permutaciones lineales serían :

ABC , BCA , CAB
ACB , BAC , CBA

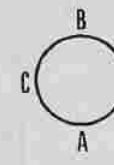
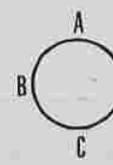
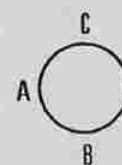
Pero en forma circular, las temas :



Corresponden a una misma ordenación circular

Para comprobarlo, parta de un objeto de referencia (digamos A) y señale en sentido horario (↻) los elementos que se van encontrando (será ABC).

Lo mismo sucede con :



Se trata de una misma ordenación circular

Con 3 objetos sólo se tendrá $(3-1)! = 2! = 2$ permutaciones circulares.

☐ Ejemplo :

¿De cuántas maneras distintas podrán sentarse 4 niños alrededor de una mesa?

Se deberá de encontrar las diferentes ordenaciones de 4 elementos (niños) alrededor de un centro (mesa), estará dado por :

$$P_c(4) = (4-1)! = 3! = 6$$

☐ Ejemplo :

Alrededor de una torta de cumpleaños, se ubican 6 vasos diferentes. ¿De cuántas formas pueden ser ubicados?

El número está dado por :

$$P_c(6) = 5! = 120$$

☐ Ejemplo :

Alrededor de un árbol, juegan 6 niños formando una ronda. Cada 90 segundos forman una nueva ronda, diferentes a las ya formadas. ¿Cuánto tiempo pasarán hasta haber agotado todas las ordenaciones posibles?

Con 6 elementos (niños) alrededor de un centro (árbol) se pueden formar permutaciones circulares y el total de ellos está dado por :

$$P_c(6) = 5! = 120$$

Como en cada uno demora 90 segundos se tendrá un tiempo total de :

$$120 (90 \text{ seg.}) = 10800 \text{ seg.} = 3 \text{ horas.}$$

Demoran 3 horas en realizar todas las rondas posibles.

3. PERMUTACIÓN CON REPETICIÓN

Es un arreglo en el cual no todos los elementos son distintos entre sí, esto es, hay elementos que se repiten.

El número de permutaciones de n objetos en el que se repiten alguno de ellos, esta denotado por $P_{k_1, k_2, \dots, k_m}^n$. Donde $k_1, k_2, \dots, k_m$ es el número de veces que se repite cada elemento, cuyo valor es:

$$P_{k_1, k_2, \dots, k_m}^n = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

☐ Ejemplo:

Con 2 bolas rojas, 2 bolas amarillas y 3 bolas azules. ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar?

$$\text{Se tendrá: } P_{2,2,3}^7 = \frac{7!}{2!2!3!} = 210$$

☐ Ejemplo:

¿De cuántas formas diferentes se pueden ordenar las letras de la palabra TAPITA?

Podemos señalar: la letra **T** se repite 2 veces, la letra **A** 2 veces y las letras **P** e **I** una vez cada una.

$$\text{Luego: } P_{2,2,1,1}^6 = \frac{6!}{2!2!1!1!} = 180$$

☐ Ejemplo:

Se desea hacer una lista con los nombres de 7 niños, ordenándolos de todas las formas posibles. Se sabe que tres niños se llaman Luis, otros dos niños se llaman Pedro y de los restantes: Marco y Fredy.

¿Cuántas formas se podrá ordenar?

Consideramos que al ordenar los nombres, se está buscando las permutaciones posibles, pero al haber nombres coincidentes entre los elementos, se tendrá permutaciones con repetición, el número está dado por:

$$P_{3,2,1,1}^7 = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420 \text{ formas}$$

4. COMBINACIÓN

Es una selección o agrupamiento que se puede formar con los elementos de un conjunto (los elementos deben de ser diferentes).

Veamos las diferentes combinaciones que se puede formar con las letras a, b, c y d .

i. **Tomados de 2 en 2**: ab, ac, ad, bc, bd, cd

a diferencia de las permutaciones, no interesa el orden de los elementos. El número de permutaciones sería $P_2^4 = 4 \times 3 = 12$, pero al no interesar el orden, se observa que **ab** sería lo mismo que **ba**, similar con **ac** y **ca**, etc..

Se repite cada ordenación de dos elementos dos veces, luego el número de combinaciones será $\frac{12}{2} = 6$ que ya se había señalado.

ii. **Tomados de 3 en 3**: abc, abd, acd, bcd

Sabemos que las permutaciones serían $P_3^4 = 24$, pero al no interesarnos el orden, las posibles ordenaciones de 3 elementos se repiten, esto es $P_3 = 3! = 6$ veces (por ejemplo $abc, acb, bac, bca, cab, cba$) el número de combinaciones será:

$$\frac{24}{6} = 4$$

iii. **Tomados de 4 en 4**: $abcd$

Con 4 objetos se forma una sola combinación de 4 objetos. El número de permutaciones sería: $P_4 = 24$.

Pero el número de ordenaciones que se van a obtener con 4 elementos, también está dado por $P_4 = 24$, luego el número de combinaciones será: $\frac{24}{24} = 1$.

En general con n elementos diferentes, el número de combinaciones que se pueden obtener agrupando de k en k ($k \leq n$), estará dado por las permutaciones de n objetos agrupados de k en k , pero dividido entre el número de permutaciones de k elementos que se puede obtener.

$$\text{Número de combinaciones de } n \text{ elementos agrupados de } k \text{ en } k = \frac{P_k^n}{P_k} = \frac{\left[\frac{n!}{(n-k)!} \right]}{k!}$$

Luego el número de combinaciones de n elementos agrupados de k en k denotado por C_k^n o también $\binom{n}{k}$, está dado por:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad n, k \in \mathbb{N} \quad y \quad 0 \leq k \leq n$$

Ejemplo:

¿De cuántas maneras diferentes se puede escoger 3 niños de un total de 5?

Al señalar que vamos a "escoger", indica que no se necesita indicar ningún orden, lo que sí interesa es el grupo formado, luego se trata de combinar 5 elementos, tomándolos de 3 en 3.

$$C_3^5 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{4 \times 5}{1 \times 2} = 10$$

Ejemplo:

De un grupo de 7 personas se quiere formar una comisión de 3 personas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar dicha comisión?

Digamos que una comisión esta formada por Luis, José y Alberto, la comisión será la misma a que la nombremos como la integrada por Alberto, Luis y José. Vemos que no interesa el orden, luego se buscará el número de combinaciones de 7 elementos agrupados de 3 en 3.

$$C_3^7 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$$

∴ Se podrán formar 35 comisiones

Ejemplo:

A la final de un torneo de Ajedrez se clasifican 5 jugadores. ¿Cuántas partidas se jugará, si se juega todos contra todos?

Si Beto juega con Luis, es lo mismo a decir que Luis juega con Beto, la partida es la misma, no interesa el orden de sus elementos, pero si que se agrupe de 2 en 2.

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$$

∴ Se juegan 10 partidas de ajedrez

Importante:

En la permutaciones interesa el orden, se busca ordenaciones

En las combinaciones no interesa el orden, se busca agrupaciones

Ejercicio

Señale cuántos productos diferentes, cada uno de tres factores primos, podrá obtenerse con los cuatro factores primos a, b, c, d ($a < b < c < d$).

Resolución

Se debe tomar números de la forma $N = x \cdot y \cdot z$

donde x, y, z son número primos. Consideremos los siguientes casos:

1. $x = y = z$: Los factores son iguales, se puede señalar:

$$N_1 = a \cdot a \cdot a, \quad N_2 = b \cdot b \cdot b,$$

$$N_3 = c \cdot c \cdot c \quad y \quad N_4 = d \cdot d \cdot d \quad \text{son 4 formas posibles} \quad \left(C_1^4 = 4 \right)$$

2. Si $x = y$ con z diferente, se tendrá:

$$\begin{array}{llll} N_5 = a \cdot b \cdot b & N_6 = a \cdot a \cdot b & N_7 = a \cdot c \cdot c & N_8 = a \cdot a \cdot c \\ N_9 = a \cdot d \cdot d & N_{10} = a \cdot a \cdot d & N_{11} = b \cdot c \cdot c & N_{12} = b \cdot b \cdot c \\ N_{13} = b \cdot d \cdot d & N_{14} = b \cdot b \cdot d & N_{15} = c \cdot d \cdot d & N_{16} = c \cdot c \cdot d \end{array}$$

Son 12 formas posibles ($2 \cdot C_2^4 = 12$)

3. Si $x \neq y \neq z$, se tendrá:

$$N_{17} = a \cdot b \cdot c, \quad N_{18} = a \cdot b \cdot d, \quad N_{19} = a \cdot c \cdot d, \quad N_{20} = b \cdot c \cdot d$$

Son 4 formas posibles: ($C_3^4 = 4$)

∴ Finalmente se tendrá: $4 + 12 + 4 = 20$ formas posibles

Por supuesto que las diferentes combinaciones a realizar no resultan sencillas. Para obtener las diferentes combinaciones de m elementos en el cual hay repetición de los elementos (C_R) agrupados de n en n , se utilizará la siguiente expresión:

$$C_{Rn}^m = \frac{m \times (m+1) \times (m+2) \times \dots \times (m+n-1)}{n!}$$

Para el ejercicio:

$$C_{R3}^4 = \frac{4 \times 5 \times 6}{3!} = 20 \quad \text{formas posibles.}$$

TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

Las diferentes aplicaciones de la probabilidad, hacen que tome singular importancia en el estudio de la matemática. Útil no sólo en la ingeniería o ciencias sino también en otras áreas como la agricultura, la administración, la medicina, etc.

La Teoría de la probabilidad comenzó en el siglo XVII con el estudio realizado por Blas Pascal y Pierre de Fermat, a los juegos de azar (juego de dados, de cartas, etc.), señalando la forma apropiada de realizar las apuestas a los jugadores. Pero también el estudio de la probabilidad se desarrolla con el análisis de los registros de mortalidad conservados en Londres a fines del siglo XVI, es quizás por ello que a la probabilidad se le presenta con interpretaciones diferentes.

I. EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Es parte de la matemática pura que se utiliza para señalar las probabilidades de determinados acontecimientos que pueden ser sencillos o complejos. Para poder efectuar el cálculo respectivo, señalamos algunos conceptos que son utilizados para obtener una visión de las características que tiene éste estudio.

1. EXPERIMENTO ALEATORIO ($\mathcal{E}$)

La palabra aleatorio significa "depende del azar", textualmente se puede escribir: "experimentos que dependen del azar" cuyo significado nos da una idea de tales experimentos. En estos experimentos no se puede señalar con precisión el resultado que se obtendrá a pesar de que no se cambien las condiciones en que se realiza el experimento, lo que sí se puede señalar es la variedad de resultados posibles a obtener. Por ejemplo:

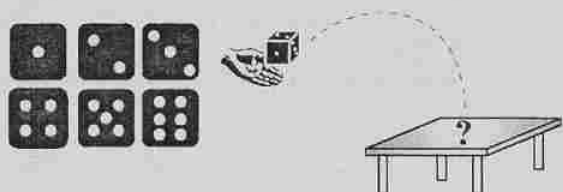
$\mathcal{E}_1$: Lanzar una moneda y observar el resultado.

Puede obtenerse cara (C) o sello (S), pero no se puede afirmar que en este lanzamiento se obtendrá cara (sello).



$\mathcal{E}_2$: Lanzar un dado

Antes de lanzarlo, podemos afirmar que podrá salir uno de los siguientes resultados: 1;2;3;4;5 ó 6, pero no se puede afirmar con seguridad que en el primer lanzamiento saldrá un 3.



$\mathcal{E}_3$: Lanzar dos dados y sumar los puntajes

Resultados posibles : 2,3,4,5 ... , 10,11,12.

$\mathcal{E}_4$: Contar el número de bicicletas vendidas durante un día en una tienda.

En general :



2. ESPACIO MUESTRAL (Ω)

Es un conjunto asociado a un experimento aleatorio, cuyos elementos son todos los posibles resultados del experimento señalado.

Así por ejemplo, de los experimentos anteriores :

Experimento	Espacio muestral (resultados posibles)
$\mathcal{E}_1$:	$\Omega_1 = \{C, S\}$
$\mathcal{E}_2$:	$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\mathcal{E}_3$:	$\Omega_3 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
$\mathcal{E}_4$:	$\Omega_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n\} \quad (n \in \mathbb{N})$

Veamos otros casos :

$\mathcal{E}_5$: Lanzar una moneda 2 veces

Sabemos que en un lanzamiento, los posibles resultados son C ó S, ahora al efectuar dos lanzamientos, se tendrá :

Lanzamiento :	Primero	Segundo	Resultado
	C	C	(C, C)
	C	S	(C, S)
	S	C	(S, C)
	S	S	(S, S)

Donde: $\Omega_5 = \{(C, C), (C, S), (S, C), (S, S)\}$

También se puede utilizar una tabla donde se encontrarán los diferentes resultados.

Segundo lanzamiento		C	S
Primer lanzamiento			
C	CC	CS	
S	SC	SS	

Tabla de dos
entradas

Nota:

Al lanzar una moneda dos veces es equivalente a lanzar dos monedas una sola vez. En general, si una moneda se lanza n veces, entonces el espacio muestral tendrá 2^n eventos elementales.

$\mathcal{E}_6$ Se lanza una moneda y un dado simultáneamente y se observan las caras superiores. La tabla de dos entradas es como sigue:

moneda	dado					
	1	2	3	4	5	6
C	(C, 1)	(C, 2)	(C, 3)	(C, 4)	(C, 5)	(C, 6)
S	(S, 1)	(S, 2)	(S, 3)	(S, 4)	(S, 5)	(S, 6)

$$\Omega_6 = \{(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6), (S, 1), (S, 2), (S, 3), (S, 4), (S, 5), (S, 6)\}$$

Ejemplo:

Se va a seleccionar un comité de tres miembros, a partir de un grupo de cinco personas A, B, C, D y E. Defina un espacio muestral para este experimento.

1. Usando la teoría combinatoria veamos ¿Cuántos eventos elementales tendrá el espacio muestral?

Como existen 5 personas y el comité deberá estar integrado por 3 miembros, entonces:

$$n(\Omega) = C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{4 \times 5}{1 \times 2} = 10$$

2. El número de elementos que tendrá el espacio muestral es 10 y el espacio muestral será:

$$\Omega = \{ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE\}$$

3. EVENTO

Se llama así a cualquier subconjunto de un espacio muestral. Se representa por una letra mayúscula.

Ejemplo:

Sea el siguiente experimento aleatorio $\mathcal{E}$:

$\mathcal{E}$: lanzar una moneda y un dado juntos

Se tendrá los siguientes eventos A y B:

Evento A: "se obtenga cara y cualquier valor en el dado"

$$A = \{(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6)\}$$

Evento B: "Se obtenga sello y un valor par"

$$B = \{(S, 2), (S, 4), (S, 6)\}$$

Para todo evento $A, B \subset \Omega$

OBSERVACIONES

1. Como eventos particulares, podemos señalar el evento cierto o seguro, cuando todos los elementos del espacio muestral pertenecen al evento ($A = \Omega$); el evento es imposible cuando se trate de un conjunto vacío ($A = \emptyset$).

2. Dado que los eventos son conjuntos, se utilizará frecuentemente las proposiciones y teoremas que involucren conjuntos, esto es el álgebra de conjuntos.



3. Empleando las operaciones de conjuntos en eventos se puede obtener otros eventos, así si A y B son eventos ($A, B \subset \Omega$) entonces:

1. $A \cup B$, señala que ocurre A o B o ambos
2. $A \cap B$, ocurre A y B juntos.
3. A' , no ocurre A (también se usa A^c o $\bar{A}$).
4. $A - B$, ocurre A pero no B.

4. Si para dos eventos A y B, se encuentra que $A \cap B = \emptyset$, es decir que no pueden ocurrir ambos, se dirá que son mutuamente excluyentes.

Por ejemplo: $\mathcal{E}$: lanzar un dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A: \text{"resulta número par"} \quad A = \{2, 4, 6\}$$

$$B: \text{"resulta número impar"} \quad B = \{1, 3, 5\}$$

Se observa $A \cap B = \emptyset$, A y B son mutuamente excluyentes.

II. DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

La teoría clásica de la probabilidad, formulada por Laplace, considera que ella mide el grado de creencia, así, cuando se está seguro de que ocurre algo se puede asignar el valor de 1 y si se está seguro de que no ocurrirá puede asignarse el valor de 0. En el caso que no se esté seguro, el grado de su creencia estará entre 0 y 1.

En general si un experimento aleatorio tiene n resultados posibles, los n elementos del espacio muestral tendrán la misma posibilidad de salir. En consecuencia la probabilidad que salga cualquiera de ellos es $1/n$.

Definición:

La probabilidad de un evento A , denotado como $P[A]$, está dado por la razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

$$P[A] = \frac{\text{número de casos favorables al evento } A}{\text{Número total de casos posibles}}$$

Ejemplo:

Hallar la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un valor mayor a 4.

Sea el evento A : "lanzar un dado y obtener puntaje mayor a 4"

Al lanzar un dado los resultados posibles son : 1,2,3,4,5 y 6, existen 6 casos posibles.

Se desea que el valor obtenido sea mayor a 4, esto puede ser 5 ó 6, hay 2 casos favorables, luego :

$$P[A] = \frac{2 \text{ (favorables)}}{6 \text{ (posibles)}} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo:

Una bola se extrae aleatoriamente de una urna que contiene 3 bolas rojas y 2 bolas azules. Determinar la probabilidad de que la bola sea

a) roja

b) azul

Señalamos como R y A los eventos de extraer una bola roja y azul respectivamente, entonces :

$$a. P[R] = \frac{3 \text{ (favorables)}}{3+2 \text{ (posibles)}} = \frac{3}{5}$$

$$b. P[A] = \frac{2 \text{ (favorables)}}{3+2 \text{ (posibles)}} = \frac{2}{5}$$

Ejemplo:

Al lanzar una moneda tres veces, señalar la probabilidad de obtener el mismo resultado en los tres lanzamientos.

Sea el evento E : "lanzar una moneda 3 veces"

donde :

$$\Omega = \{(C, C, C), (C, C, S), (C, S, C), (C, S, S), \\ (S, C, C), (S, C, S), (S, S, C), (S, S, S)\}$$

El evento A : "obtener el mismo resultado :

$$A = \{(C, C, C), (S, S, S)\}$$

Luego :

$$P[A] = \frac{2 \text{ (favorables)}}{8 \text{ (posibles)}} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo:

Sobre una mesa hay 20 tornillos, de los cuales 5 son defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad que al tomar 3 tornillos, los 3 sean defectuosos?

El número de casos posibles estará dado por todos los grupos de 3 tornillos a elegir de 20 tornillos.

$$C_3^{20} = \frac{20 \times 19 \times 18}{1 \times 2 \times 3} = 1140$$

El número de casos favorables está dado por los grupos de 3 tornillos todos defectuosos, elegidos de los 5.

$$C_3^5 = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$$

Se tendrá :

$$P = \frac{10 \text{ (favorables)}}{1140 \text{ (posibles)}} = \frac{1}{114}$$

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Para 2 eventos A y B mutuamente excluyentes es decir que ambos no pueden ocurrir a la vez, $A \cap B = \emptyset$, se cumple:

$$P_{[A \cup B]} = P_{[A]} + P_{[B]}$$

Esto es, la probabilidad de que ocurra uno u otro evento mutuamente excluyente es la suma de las probabilidades de los eventos por separado.

Ejemplo:

Se lanza un dado dos veces. Sean los eventos:

A : "En los 2 lanzamientos se obtiene el mismo número"

B : "En el primer lanzamiento se obtiene valor impar y en el segundo se obtenga 2"

Señalamos $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$B = \{(1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$

El espacio muestral es $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$ (36 elementos)

Se puede señalar que A y B son mutuamente excluyentes, no ocurren a la vez, $A \cap B = \emptyset$

Luego:

$$P_{[A]} = \frac{6 \text{ (favorables)}}{36 \text{ (posibles)}} = \frac{1}{6}$$

$$P_{[B]} = \frac{3 \text{ (favorables)}}{36 \text{ (posibles)}} = \frac{1}{12}$$

Luego la probabilidad de que en dos lanzamientos se obtenga el mismo número o que en el primero se obtenga valor impar y en el segundo se obtenga 2, es:

$$P_{[A \cup B]} = P_{[A]} + P_{[B]} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

* Para n eventos mutuamente excluyentes $A_1, A_2, \dots, A_n$ cuyas probabilidades respectivas son:

$$P_{[A_1]}, P_{[A_2]}, \dots, P_{[A_n]}$$

Se tendrá: $P_{[A]} = P_{[A_1]} + P_{[A_2]} + \dots + P_{[A_n]}$

donde: $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

EVENTOS INDEPENDIENTES

Dos eventos A y B son independientes, si al ocurrir uno de ellos cualquiera, no afecta la ocurrencia del otro evento. En este caso:

$$P_{[A \cap B]} = P_{[A]} \times P_{[B]}$$

La probabilidad de que ambos eventos ocurran esta dado por el producto de las probabilidades de cada evento por separado.

Ejemplo:

Se lanza un dado dos veces (experimento aleatorio)

Se tiene los eventos:

A : "El primer lanzamiento resulte un valor impar"

B : "El segundo lanzamiento resulte un valor menor a 3"

$$\text{Luego: } P_{[A]} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

En el lanzamiento de un dado hay 6 posibles resultados: 1, 2, 3, 4, 5, 6 de ellos sólo 3 son impares

$$\text{Además: } P_{[B]} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

En el segundo lanzamiento habrá 6 posibles resultados pero 2 son menores a 3 (1 y 2).

Como el evento A no afecta la ocurrencia del evento B , entonces, para que ocurran a la vez se tendrá:

$$P_{[A \cap B]} = P_{[A]} \times P_{[B]} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Ejercicio

Calcular la probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda y un puntaje mayor a 2 al lanzar un dado.

Resolución:

Señalamos A : "obtener cara al lanzar una moneda"

B : "obtener 3, 4, 5 ó 6 al lanzar un dado"

Luego:

$$P_{[A]} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P_{[B]} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Como A y B son independientes, la probabilidad de que ocurran está dado por:

$$P_{[A \cap B]} = P_{[A]} \times P_{[B]} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

- * Para n eventos independientes, la probabilidad de que ocurran simultáneamente es el producto de las probabilidades de cada evento por separado.

$$P_{[A]} = P_{[A_1]} \times P_{[A_2]} \times \dots \times P_{[A_n]}$$

Donde $A_1, A_2, \dots, A_n$ son independientes y $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$

Ejemplo:

Calcular la probabilidad de que al lanzar cinco dados, se obtenga en cada uno, un valor par.

Resolución:

Señalamos A_1 : "Lanzar el primer dado y obtener puntaje par"

Encontremos la probabilidad de que ocurra A_1

Casos favorables (que obtenga valor par) $\underline{2, 4, 6}$
3 Valores

Casos posibles: $\underline{1, 2, 3, 4, 5, 6}$
6 valores

$$\text{Luego: } P_{[A_1]} = \frac{3}{6} \left(\frac{\text{favorables}}{\text{posibles}} \right) = \frac{1}{2}$$

Ahora: A_2 : "lanzar el segundo dado y obtener puntaje par"

Como se observa, este evento es similar al primero, pero ocurre con el segundo dado la probabilidad no varía.

$$P_{[A_2]} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

lo mismo A_3 (para el tercer dado): $P_{[A_3]} = 1/2$

A_4 (para el cuarto dado): $P_{[A_4]} = 1/2$

A_5 (para el quinto dado): $P_{[A_5]} = 1/2$

Se desea que ocurran los 5, esto es $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$ pero nótese que lo que sale en cualquiera de los dados no afecta a lo que sale en los demás. Son eventos independientes, la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia de los otros, entonces:

$$\begin{aligned} P_{[A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5]} &= P_{[A_1]} \times P_{[A_2]} \times P_{[A_3]} \times P_{[A_4]} \times P_{[A_5]} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \end{aligned}$$

OBSERVACIONES

1. La probabilidad es un número que puede ser desde 0 hasta 1 incluso pero frecuentemente se expresa como un tanto por ciento, para ello bastará con multiplicar por 100 y colocar el signo % al producto obtenido.

$$\text{Así: } 0,20 = (0,20 \times 100) \% = 20 \%$$

$$0,43 = (0,43 \times 100) \% = 43 \%$$

$$0,721 = (0,721 \times 100) \% = 72,1 \%$$

2. Tener siempre presente la diferencia de los términos que se utiliza en la teoría de la probabilidad.

Nombre	Símbolo	Naturaleza
Espacio muestral	Ω	conjunto
Evento	A	conjunto
Probabilidad	$P_{[A]}$	número

$$A \subset \Omega$$

Ejercicio:

Si se tiene 8 libros diferentes de los cuales 2 son de aritmética y el resto es de historia, ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger al azar un libro, resulte de aritmética?

Resolución

Según la definición de probabilidad: $P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$

Favorables: elegir uno de los de aritmética (2 formas)

Posibles: elegir cualquiera de los 8 (8 formas)

$$\text{Luego: } P = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 = (0,25 \times 100 \%) = 25 \%$$

Se puede indicar que la probabilidad es de $\frac{1}{4}$, 0,25 ó 25 %

III. AXIOMAS Y TEOREMAS DE LA PROBABILIDAD

Para un experimento aleatorio ($\mathcal{E}$) cuyo espacio muestral (Ω) está debidamente señalado, y un evento A ($A \subset \Omega$), cuya probabilidad es $P_{[A]}$ se cumplen los axiomas y teoremas siguientes:

1. Para todo $A \subset \Omega$: $0 \leq P_{[A]} \leq 1$
2. Sólo si $A = \Omega$: $P_{[\Omega]} = 1$ (A es evento seguro)
3. Dados $A, B \subset \Omega$, si además A y B son eventos mutuamente excluyentes, se cumple :

$$P_{[A \cup B]} = P_{[A]} + P_{[B]}$$

4. Si A' es el complemento de A ($A \cup A' = \Omega$) entonces se dirá que A y A' son eventos mutuamente excluyentes que cumplen con :

$$P_{[A]} + P_{[A']} = 1$$

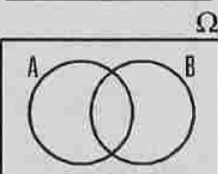
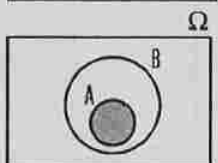
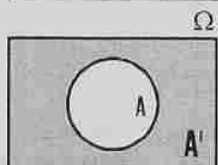
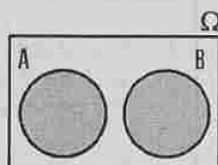
5. Si $A, B \subset \Omega$, pero además $A \subset B$, entonces :

$$P_{[A]} \leq P_{[B]}$$

6. Para dos eventos A, B , se cumple :

$$a. P_{[A-B]} = P_{[A]} - P_{[A \cap B]}$$

$$b. P_{[A \cup B]} = P_{[A]} + P_{[B]} - P_{[A \cap B]}$$



Ejercicio :

Dado un experimento aleatorio $\mathcal{E}$, se obtuvo el siguiente espacio muestral :

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3)\}$$

Se tienen los eventos: $A = \{(x,y) / x = y\}$

$$B = \{(x,y) / x+y = 3\}, \quad C = \{(x,y) / x = 4\}$$

Señale las siguientes probabilidades :

$$a. P_{[A]}, P_{[B]}, P_{[C]}$$

$$b. P_{[A \cup B]}, P_{[A \cap B]}$$

$$c. P_{[A-C]}$$

$$d. P_{[A']}, P_{[B']}, P_{[A \cup B']}$$

Resolución :

Como se observa, las expresiones corresponden a conjuntos. Determinados por extensión cada uno de los eventos.

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3)\} \Rightarrow 3 \text{ elementos}$$

$$B = \{(1,2), (2,1)\} \Rightarrow 2 \text{ elementos}$$

$$C = \{\} = \emptyset \Rightarrow 0 \text{ elementos}$$

$$a. P_{[A]} = \frac{\text{casos favorables } 3}{\text{casos posibles } 6} \quad (\text{número de elementos de } A) / (\text{número de elementos de } \Omega)$$

$$\text{Luego: } P_{[A]} = \frac{1}{2}, \text{ similar } P_{[B]} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ y } P_{[C]} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\text{Se tiene: } P_{[A]} = \frac{1}{2}, P_{[B]} = \frac{1}{3}, P_{[C]} = 0 \text{ (evento imposible)}$$

- Nótese que A y B son mutuamente excluyentes

$$P_{[A \cup B]} = P_{[A]} + P_{[B]} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$P_{[A \cap B]} = P_{[\emptyset]} = 0$$

el resultado no cambia si se hubiese encontrado :

$$A \cup B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\} \Rightarrow P_{[A \cup B]} = \frac{5}{6}$$

$$A \cap B = \{\} = \emptyset \Rightarrow P_{[A \cap B]} = 0$$

- $P_{[A-B]} = P_{[A]} - P_{[A \cap B]}$ (según teorema, pero $A \cap B = \emptyset$)

$$P_{[A-B]} = P_{[A]} - P_{[\emptyset]} = P_{[A]} - 0 = P_{[A]} = 1/2 \Rightarrow P_{[A-B]} = 1/2$$

$$d. P_{[A']} = 1 - P_{[A]} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_{[B']} = 1 - P_{[B]} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P_{[A \cup B]'} = 1 - P_{[A \cup B]} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

OBSERVACIÓN :

En la resolución de los problemas se debe tener especial cuidado el determinar si dos eventos son independientes, en muchos casos se podrá tomar un criterio basado en consideraciones físicas. Por ejemplo en un concurso de tiro al blanco la probabilidad que acierte un tirador es independiente de que acierten o no los demás participantes.

Propiedad :

Para 2 eventos A y B cualesquiera ($A, B \subset \Omega$), siendo independientes.

Se cumple :

$$P_{[A \cup B]} = 1 - (1 - P_{[A]}) \times (1 - P_{[B]})$$

Ejercicio :

Las probabilidades que tienen Alberto y César de resolver un mismo problema son $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente. Si ambos intentan hacerlo, señale la probabilidad de que resuelvan el problema.

Resolución :

Sean los eventos :

A : "Alberto resuelve un problema m "

B : "César resuelve un problema m "

donde : $P_{[A]} = \frac{2}{5}$ y $P_{[B]} = \frac{1}{3}$

Se desea hallar : $A \cup B$ (ambos resuelvan el problema)

Se tendrá : $P_{[A \cup B]} = 1 - P_{[(A \cup B)']}$ (Prop. del complemento)
 $= 1 - P_{[A' \cap B']}$ (ley de Morgan)

Como A y B son independientes, también lo serán sus complementos : A' y B' son independientes.

Luego : $P_{[A' \cap B']} = P_{[A']} \times P_{[B']}$ (eventos independientes)

reemplazando : $P_{[A \cup B]} = 1 - P_{[A']} \times P_{[B']}$
 $= 1 - (1 - P_{[A]}) \times (1 - P_{[B]})$

Para el problema reemplazamos :

$$P_{[A \cup B]} = 1 - (1 - \frac{2}{5}) \times (1 - \frac{1}{3}) = \frac{3}{5}$$

* Recuerde que si A y B son independientes, entonces :

A' y B son independientes

A y B' son independientes

A' y B' son independientes

Ejercicio

La probabilidad de que José anote un gol al patear un penal es de 0,3 ¿Cuál es la probabilidad de que anote por lo menos un gol al patear 3 penales?

Resolución

Sea el evento A_1 : "Anotar un gol en el primer penal" y A_2, A_3 similares pero en el segundo y tercer penal ; respectivamente.

Se desea que suceda A_1 , ó A_2 ó A_3 , es decir que se cumpla $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, veamos :

$$P_{[A_1]} = 0,3 = P_{[A_2]} = P_{[A_3]}$$

Luego la probabilidad de que no anote gol será en cada caso :

$$P_{[A_1']} = 1 - 0,3 = 0,7$$

Similar : $P_{[A_2']} = P_{[A_3']} = 0,7$

Luego la probabilidad de que no anote ningún gol al patear los 3 penales será :

$$P_{[A_1']} \times P_{[A_2']} \times P_{[A_3']} = 0,7 \times 0,7 \times 0,7 = 0,343$$

Por lo tanto, la probabilidad de que anote por lo menos un gol es :

$$1 - P_{[A_1']} \times P_{[A_2']} \times P_{[A_3']} = 1 - 0,343 = 0,657$$

Para el problema se cumple : $P_{[A \cup B \cup C]} = 1 - P_{[A']} \times P_{[B']} \times P_{[C']}$

Siempre que los eventos A, B y C sean independientes.

Ejercicio

En una carrera de caballos el caballo A tiene las apuestas 3:1 a su favor, mientras que el caballo B las tiene 4:1 en su contra. ¿Cuál es la probabilidad que cualquiera de éstos caballos gane?

Resolución

Cuando se expresan las apuestas, aparece una relación entre las posibilidades a favor y en contra de que se produzca un evento. Así al señalar :

* "3:1 a su favor" significa que :

hay 3 posibilidades a su favor y hay 1 posibilidad en su contra, en total se mencionan 4 posibilidades, expresado en probabilidades, diremos :

$$P_{\{Gane A\}} = \frac{\text{casos favorables } 3}{\text{casos posibles } 4} = \frac{3}{4}$$

- * "4 a 1 en su contra" significa que : hay 4 posibilidades en su contra
y hay 1 posibilidad a su favor

en este caso, se mencionan un total de 5 posibilidades en probabilidades se tendrá :

$$P_{\{gane B\}} = \frac{\text{casos favorables } 1}{\text{casos posibles } 5} = \frac{1}{5}$$

Para el ejemplo : $P_{\{A\}} = \frac{3}{4}, P_{\{B\}} = \frac{1}{5}$

Se busca la probabilidad de que gane A ó gane B, esto es $A \cup B$, se tendrá :

$$P_{\{A \cup B\}} = P_{\{A\}} + P_{\{B\}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} = 0,95$$

Observe que A y B son mutuamente excluyentes, sólo puede ganar uno de ellos en la carrera.

Nota :

Al señalar en las apuestas $\frac{a}{b}$ a su favor, se indica que tendrá $\frac{b}{a}$ en contra:

" $\frac{a}{b}$ a favor equivale $\frac{b}{a}$ en contra" , también

La probabilidad de que ocurra el evento será $\frac{a}{a+b}$ y de que no ocurra $\frac{b}{a+b}$

Ejercicio

Juan y Andrés juegan tenis con la misma habilidad. Deciden jugar una secuencia de sets hasta que uno de ellos gane 2 sets seguidos. Señale la probabilidad de que se necesite un número par de set jugados para terminar el juego.

Resolución

Sean los eventos J : "Gana el set Juan"

A : "Gana el set Andrés"

Al señalar que ambos tienen la misma habilidad se entiende que comparten la misma probabilidad de ganar un set.

$$P_{\{J\}} = P_{\{A\}} = \frac{1}{2}$$

Además J, A son independientes

Según el enunciado, se jugará hasta que se gane 2 sets consecutivos, indica que si se gana alternadamente, el juego no termina. Entonces se pueden dar los siguientes casos :

Empieza ganando Juan

- a. JJ
- b. JAA
- c. JAJJ
- d. JAJAA
- e. JAJAJJ

Empieza ganando Andrés

- a. AA
- b. AJJ
- c. AJAA
- d. AJAJJ
- e. AJAJAA

Cada caso es mutuamente excluyente con los demás, por decir JJ (esto es que Juan gane los dos primeros sets) no puede ocurrir simultáneamente con JAJJ (esto es que Juan gane el primero, tercero y cuarto) etc.

La probabilidad de que se juegue un número par de sets, estará dado por la suma de las probabilidades de cada caso, esto por ser mutuamente excluyentes, se tendrá :

$$P_{\{J_p\}} = P_{\{JJ\}} + P_{\{AA\}} + P_{\{JAJJ\}} + P_{\{AJAA\}} + \dots$$

↘ J_p : "se juega una cantidad par de sets"

Observamos que la cantidad de casos no está limitado pero calculemos las respectivas probabilidades:

$P_{\{JJ\}}$, probabilidad de que Juan gane 2 sets consecutivos, como son independientes los eventos, se tendrá :

$$P_{\{JJ\}} = P_{\{J\}} \times P_{\{J\}} = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Similar : $P_{\{AA\}} = P_{\{A\}} \times P_{\{A\}} = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$$P_{\{JAJJ\}} = P_{\{J\}} \times P_{\{A\}} \times P_{\{J\}} \times P_{\{J\}} = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

$$P_{\{AJAA\}} = P_{\{A\}} \times P_{\{J\}} \times P_{\{A\}} \times P_{\{A\}} = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

Calculando las siguientes probabilidades, se tendrá $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{256}$, etc. al reemplazar

$$P_{[V_P]} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} + \dots$$

$$= 2 \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots \right]$$

Progresión geométrica decreciente
de términos infinitos

Se halla la suma de términos de la progresión geométrica

$$S_{PG} = \frac{\text{primer término}}{1 - \text{razón}} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Al reemplazar $P_{[V_P]} = 2 \left[\frac{1}{3} \right] = \frac{2}{3}$



Ejercicio

"n" personas se sientan alrededor de una mesa redonda. Hallar la puntuación de las apuestas en contra de que dos personas en particular (de las "n" consideradas) se sienten una junto a la otra.

Resolución :

Encontremos la probabilidad de que se obtenga lo señalado:

Ω : "n" personas se sientan alrededor de una mesa "

A : "2" personas se sientan juntas "

Numero de formas posibles
que n personas se sientan
alrededor de una mesa. $= (n-1)!$

Número de formas favorables :

las dos personas que están juntas se consideran como una sola, habría $(n-1)!$ elementos, luego las formas de sentarse sería $(n-2)!$, pero las 2 personas pueden cambiar de asiento, lo que haría $2 \times (n-2)!$

$$\text{Luego: } P_{[A]} = \frac{2 \times (n-2)!}{(n-1)!} = \frac{2}{n-1}$$

Para señalar las apuestas, se tendría de lo anterior: $\begin{cases} \rightarrow 2 \text{ posibilidades a favor} \\ \rightarrow (n-1) \text{ posibilidades en total} \end{cases}$

Luego habrá: $(n-3)!$ posibilidades en contra.

Finalmente se dirá : "2 : $(n-3)!$ a su favor" ó " $(n-3) : 2$ en su contra"



Ejemplo:

Un examen contiene 10 preguntas que deben responderse con verdadero ó falso. Calcular la probabilidad de responder 7 preguntas con falso y las 3 restantes con verdadero.

Resolución :

Cada pregunta tiene 2 formas a responder, luego se puede indicar :

1 pregunta tiene 2 formas (V ó F)

2 preguntas tienen 4 formas (VV, VF, FV, FF)

3 preguntas tienen 8 formas

Así hasta tener 10 preguntas que tendrá $2^{10} = 1024$ formas, son todos los casos posibles.

Ahora, se señala que responda 7 con falso y 3 con verdadero : FFFFFFFVVV, las diferentes ordenaciones estará dado por :

$$P_{R_{7,3}}^{10} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120 \text{ formas}$$

Luego la probabilidad P buscada, estará dada por :

$$P = \frac{120}{1024} = \frac{15}{128}$$

Otra forma : Cada respuesta es independiente de las demás, también :

$$P_{[V]} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P_{[F]} = \frac{1}{2}$$

$$\text{En este caso : } P_{[FFFFFFVVV]} = \underbrace{\left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \dots \left(\frac{1}{2} \right)}_{10 \text{ factores}} = \frac{1}{1024}$$

Como hay 120 formas que se puede responder :

$$P_{[FFFFFFVVV]} = 120 \left(\frac{1}{1024} \right) = \frac{120}{1024} = \frac{15}{128} \Rightarrow P = \frac{15}{128}$$



ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS RESUELTOS

♦♦♦ *Análisis Combinatorio*

PROBLEMA 1

Simplificar la siguiente expresión:

$$M = \frac{(8! \times 7^2) + (9! \times 4) + (8! \times 5)}{(7! \times 6^2) - (8! \times 8) + (7! \times 10^2)}$$

- A) 7! B) 8 C) 9!
D) 10 E) 1

PROBLEMAS 2

Encuentre el valor de A

$$A = \frac{0!}{2!} + \frac{1!}{3!} + \frac{2!}{4!} + \dots + \frac{18!}{20!}$$

- A) 1 B) 0,96 C) 1,04
D) 0,95 E) 0,9

PROBLEMA 3

Hallar el valor de R:

$$R = \left[\left(\frac{11 \times (25!) \times (9!)}{(12!) \times 5 \times (23!)} \right)^{21} + 1! \right]!$$

- A) 1 B) 2 C) 6
D) 24 E) 6!

PROBLEMA 4

Si se cumple que: $\overline{ab} + m = a! + b!$

Determine el valor de $\frac{a+b}{m}$

Si $m < b$ y son enteros positivos.

- A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 3 E) 5

PROBLEMA 5

Conocida la siguiente expresión:

$$\frac{[(a!+1)!-1!]^2}{((a!+1)!+1)!} = \frac{(a!+1)!+1!}{(a!+1)! \times 42 \times ((a!+1)!+1)!}$$

Hallar: $a + a! + (a!)!$

- A) 3 B) 6 C) 2
D) 729 E) 0

PROBLEMA 6

$$\text{Si: } \frac{(\overline{ab}-1)! + \overline{ab}! + (\overline{ab}+1)!}{(\overline{ab}-1)! \times (\overline{ab}+1)!} = n!$$

Halle: $a+b+n$

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 9 E) 11

PROBLEMA 7

$$\text{Se conoce: } a \Delta b = \begin{cases} a! + b & \text{si } a \geq b \\ b! - a & \text{si } a < b \end{cases}$$

$$\text{determine: } \frac{2 \Delta (1 \Delta 2)}{1 \Delta (2 \Delta 1)}$$

- A) 1 B) 0,2 C) 0,3
D) 0,5 E) 0,6

PROBLEMA 8

Si se conoce que: $(a!)^{b!} \times (b!)^{a!} = mn pq$

Halle la suma de cifras de: $(a+b)!$ donde:

- $a < b < 7$
A) 6 B) 3 C) 9
D) 2 E) 1

PROBLEMA 9

Señale el producto de las cifras a, b y c si:

$$\overline{abc} = a! + b! + c!$$

- A) 30 B) 20 C) 9
D) 6 E) 12

PROBLEMA 10

Determine el valor de S expresado como:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{20}$$

donde: $S_k = \underbrace{k! + k! + k! + \dots}_{k \text{ sumandos}}$

- A) 20! B) 21! C) 20! + 1
D) 20! - 1 E) 21! - 1

PROBLEMA 11

Si se cumple:

$$\frac{\overline{ab}! \times (\overline{ab}-1)!}{\overline{ab}! - (\overline{ab}-1)!} = \overline{cbdb} \times \overline{ab} \times (\overline{ab}-2)$$

Halle: $a+b+c+d$

- A) 4 B) 5 C) 7
D) 9 E) 10

PROBLEMA 12

Encuentre el valor de:

$$y = \left(\frac{3! - 1! \times 3}{3!} \right) \times \left(\frac{4! - 2! \times 4}{4!} \right) \times \left(\frac{5! - 3! \times 5}{5!} \right) \times \dots \times \left(\frac{21! - 19! \times 21}{21!} \right)$$

- A) 0,20 B) 0,05 C) 0,25
D) 0,50 E) 0,02

PROBLEMA 13

Dadas las expresiones A, B y C definidas como:

$$A = \sum_{k=1}^{10} (k!) \times (k+2)$$

$$B = \sum_{k=1}^{10} (k+1)! \quad y \quad C = \sum_{k=1}^{10} k!$$

$$\text{Halle: } \frac{A-B}{C}$$

- A) 2 B) 1 C) 0
D) 0,5 E) 0,25

PROBLEMA 14

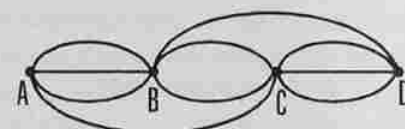
Encuentre el valor de P

$$P = \prod_{k=1}^{14} \left[\frac{(k+3)! \times (k+1)!}{k! \times (k+4)!} + 2 \right]$$

- A) $3^{13} - 2$ B) $3^{13} - 3^{12}$
C) $3^{12} - 3^2$ D) 3^{12}
E) $3^{13} \times 2$

PROBLEMA 15

¿De cuántas maneras diferentes podrá viajar una persona de A a D sin retroceder?



- A) 20 B) 18 C) 24
D) 21 E) 23

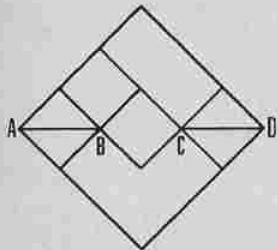
PROBLEMA 16

¿Cuántas palabras diferentes sin importar su sentido, se pueden formar intercambiando de lugar las letras de la palabra TEMA?

- A) 20 B) 16 C) 15
D) 18 E) 24

PROBLEMA 17

Si se parte de A y se llega a D, sin retroceder.
¿De cuántas formas diferentes se podrá hacer?



- A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

PROBLEMA 18

¿Cuántas palabras de 6 letras diferentes que terminen en A, pueden obtenerse con las letras de la palabra ROSITA, sin que se repita ninguna palabra y sin importar si la palabra tiene sentido o no?

- A) 24 B) 48 C) 50
D) 120 E) 720

PROBLEMA 19

¿De cuántas maneras diferentes se puede seleccionar una consonante y una vocal de las letras de la palabra NUMEROS?

- A) 10 B) 11 C) 12
D) 6! E) 7!

PROBLEMA 20

¿Cuántas palabras diferentes de 5 letras diferentes formadas por 2 vocales y 3 consonantes se pueden formar sin interesar el sentido, escogiendo de las letras de la palabra ESQUILMAR?

- A) 60 B) 120 C) 240
D) 2400 E) 7200

PROBLEMA 21

Carlos y Manuel acuden a un restaurante que ofrece un menú de 10 comidas diferentes. Si cada uno desea pedir una comida diferente a lo que pide el otro. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerse el pedido?

- A) 45 B) 90 C) 100
D) 180 E) 200

PROBLEMA 22

¿De cuántas formas pueden sentarse 7 personas en un sofá si tiene solamente 4 asientos?

- A) 24 B) 48 C) 120
D) 720 E) 840

PROBLEMA 23

4 personas abordan un automóvil en el que hay 6 asientos. Si sólo 2 saben conducir. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse?

- A) 24 B) 60 C) 120
D) 240 E) 360

PROBLEMA 24

Adán, Beto y Carlos, llegan a una ciudad con 3 hoteles. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ocupar cada uno una habitación, si además desean estar en hoteles diferentes?

En el primer hotel hay 3 habitaciones libres, en el segundo hotel hay 4 y en el último 2?

- A) 12 B) 24 C) 60
D) 120 E) 144

PROBLEMA 25

¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar en una fila de 5 butacas, 3 hombres y 2 mujeres de modo que las mujeres no estén juntas?

- A) 12 B) 24 C) 36
D) 48 E) 72

PROBLEMA 26

10 niños son ubicados en una misma fila de modo que 3 niños siempre están juntos. ¿De cuántas maneras se puede hacer?

- A) 7! B) 8! C) $6 \times (7!)$
D) $6 \times (8!)$ E) $7 \times (8!)$

PROBLEMA 27

Con las cifras 3, 4, 5, 6, 7 y 8. ¿Cuántos números pares de 3 cifras diferentes, se pueden formar?

- A) 10 B) 20 C) 30
D) 50 E) 60

PROBLEMA 28

¿Cuántos números mayores a 13 y menores a 100 existen, tales que en su escritura sólo se utilizan cifras impares?

- A) 21 B) 23 C) 25
D) 26 E) 27

PROBLEMA 29

4 hombres y 3 mujeres deben sentarse en una fila de 7 asientos de modo que ningún hombre ocupe sitio par. ¿De cuántas maneras diferentes podrán sentarse?

- A) 120 B) 144 C) 150
D) 360 E) 720

PROBLEMA 30

¿De cuántas maneras se pueden ubicar 5 chicas en una fila de manera que dos chicas en particular no queden juntas?

- A) 12 B) 24 C) 36
D) 48 E) 72

PROBLEMA 31

¿Cuántos números de 3 cifras significativas

existen, tales que en su escritura aparezca la cifra 3 por lo menos una vez.

- A) 120 B) 240 C) 217
D) 127 E) 712

PROBLEMA 32

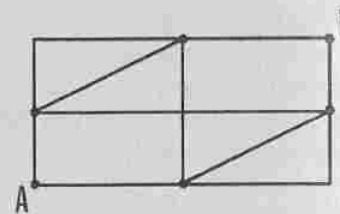
¿Cuántos números de 5 cifras existen, tales que el producto de sus cifras sea un valor impar?

- A) 25 B) 625 C) 5^5
D) 5! E) 5^4

PROBLEMA 33

En el siguiente gráfico, calcular el número de caminos que existe para ir de A hasta B siguiendo un recorrido mínimo.

- A) 6
B) 8
C) 10
D) 16
E) 24

**PROBLEMA 34**

En un club entrenan 10 hombres y 6 mujeres para participar en un evento deportivo. Se competirá en 3 disciplinas diferentes y en cada una habrá dos categorías, para hombres una y para mujeres la otra. Si cada club envía una delegación de 6 atletas, donde cada uno participa en diferentes disciplinas. ¿De cuántas formas podrá dicho club nombrar su delegación si decide enviar 3 hombres y 3 mujeres?

- A) $(5!)^2$ B) $6 \times (5!)^2$
C) $(6!)^2$ D) $5 \times (6!)^2$
E) $7! \times 6!$

PROBLEMA 35

¿Cuántos números de 3 cifras significativas y diferentes entre sí existen, tales que la suma de sus cifras sea 6?

- A) 4 B) 6 C) 12
D) 18 E) 90

PROBLEMA 36

Si el complemento aritmético de $\overline{abc}$ es un número de 3 cifras significativas cuya suma de cifras es $a + b + c$. ¿Cuántos números $\overline{abc}$ existen?

- A) 48 B) 49 C) 5
D) 56 E) 52

PROBLEMA 37

¿De cuántas formas se pueden sentar en una fila de 5 asientos: 2 hombres, 2 mujeres y un niño de modo que a la derecha e izquierda del niño se encuentre siempre una mujer?

- A) 10 B) 11 C) 12
D) 14 E) 16

PROBLEMA 38

Se ordenan 6 libros en un estante donde 2 de ellos son de Álgebra. ¿De cuántas formas diferentes se podrá ordenar los libros si los que no son de Álgebra deben de estar juntos?

- A) 24 B) 60 C) 72
D) 120 E) 144

PROBLEMA 39

¿Cuántos números de 3 cifras significativas diferentes existen, tales que la suma de sus cifras sea 9?

- A) 9 B) 10 C) 12
D) 18 E) 20

PROBLEMA 40

¿Cuántos números de la forma $\overline{ba(a+b)}$ existen?

- A) 12 B) 15 C) 18
D) 20 E) 21

PROBLEMA 41

Carlos lleva al cine a María y a sus 3 hermanos y encuentra 5 asientos libres en una fila. ¿De cuántas maneras diferentes podrán sentarse si a la derecha e izquierda de Carlos está un hermano de María?

- A) 6 B) 12 C) 20
D) 24 E) 36

PROBLEMA 42

Un tablero está constituido por 16 casilleros distribuidos en 4 columnas y 4 filas. Se desea colocar 4 monedas de diferente valor en el tablero de modo que haya una sola moneda por fila y por columna. ¿De cuántas maneras se puede distribuir las monedas?

- A) 256 B) 64 C) 625
D) 576 E) 900

PROBLEMA 43

¿Cuántos números de dos cifras significativas y diferentes entre sí existen, tales que la suma de dichas cifras es un número de dos cifras significativas y diferentes entre sí?

- A) 12 B) 16 C) 18
D) 20 E) 24

PROBLEMA 44

¿Cuántos valores diferentes toma P si:

$$P = \frac{\overline{ab} \times \overline{ab} \times \overline{ab} \times \dots}{\overline{bc} \text{ factores}}$$

Donde: $a \neq b$

- A) 4! B) 5! C) 6!
D) 7! E) 8!

PROBLEMA 45

¿Cuántos números de la forma $a(\frac{2a}{b})6b$ existen?

- A) 25 B) 26 C) 27
D) 28 E) 29

PROBLEMA 46

¿Cuántos números de 4 cifras significativas existen, tales que al sumarles la suma de sus cifras se obtiene un valor mayor a 4000?

- A) 4395 B) 4397 C) 4396
D) 4398 E) 4400

PROBLEMA 47

Si existen 72 números de la forma:

$$(a+3)(b-2)\overline{ba}_k$$

Señale el valor de la base k .

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

PROBLEMA 48

Determine la cantidad de valores que toma:

$$\frac{\overline{ba}}{\overline{abc}}$$

- A) 300 B) 810 C) 8100
D) 72900 E) 9000

PROBLEMA 49

Cuántos números de 4 cifras tienen por lo menos una cifra no significativa?

- A) 3429 B) 3294 C) 2439
D) 2349 E) 4239

PROBLEMA 50

¿Cuántos números de la forma $\overline{a3bc}$ existen, tales que el producto de sus cifras es impar?

- A) 125 B) 250 C) 500
D) 375 E) 450

PROBLEMA 51

¿Cuántos números de 5 cifras diferentes que acaban en cifra significativa, tienen sus demás cifras impares?

- A) 480 B) 500 C) 520
D) 600 E) 640

PROBLEMA 52

¿Cuántos números de 5 cifras son tales que el producto de sus cifras no es un valor impar?

- A) 86875 B) 68755 C) 68775
D) 88675 E) 86755

PROBLEMA 53

¿Cuántos números de 3 cifras existen en los cuales una cifra se repite 2 veces solamente?

- A) 243 B) 240 C) 270
D) 297 E) 720

PROBLEMA 54

Si en el sistema de base 7 se eliminan todos los números pares y los que comienzan en cifra impar. ¿Cuántos números de 3 cifras quedan?

- A) 30 B) 36 C) 60
D) 72 E) 80

PROBLEMA 55

Se escribe en forma sucesiva todos los números de 3 cifras que empiezan en cifra 3.

¿Cuántas cifras no son 3?

- A) 120 B) 140 C) 150
D) 180 E) 200

PROBLEMA 56

Se tiene 9 bolas numeradas del 1 al 9. ¿De cuántas formas diferentes, se pueden ordenar 3 bolas escogidas de las anteriores, de modo que al sumar los valores indicados en cada una, se obtenga siempre 9?

- A) 16 B) 18 C) 24
D) 30 E) 36

PROBLEMA 57

¿Cuántos números de 8 cifras, con 7 cifras 6, existen en base 9?

- A) 60 B) 62 C) 63
D) 64 E) 72

PROBLEMA 58

¿En qué sistema de numeración existen 77 números de 3 cifras, tales que sus dos primeras cifras sean consecutivas?

- A) 5 B) 7 C) 9
D) 11 E) 13

PROBLEMA 59

Encuentre el número de permutaciones que se pueden obtener con m elementos; si de ellos, 3 objetos a , b y c siempre están juntos.

- A) $m!$ B) $(m+1)! \times 2$
C) $(m-2)! \times 3$ D) $(m+1)! \times 3$
E) $(m-2)! \times 6$

PROBLEMA 60

En un internado, una sección tiene 5 habitaciones, distribuidos de la forma siguiente: 2 a la derecha del corredor, 2 a la izquierda y uno al final del mismo corredor. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar 5 alumnos, cada uno en una habitación diferente, si en particular 2 de ellos no desean estar al final del corredor.

- A) 72 B) 36 C) 24
D) 60 E) 12

PROBLEMA 61

Señale la cantidad de formas diferentes que 10 atletas pueden recibir medallas de oro, plata y bronce en una competencia donde no hubo empate alguno. Si uno de los atletas siempre ocupa el cuarto puesto.

- A) 24 B) 120 C) 720
D) 5040 E) 504

PROBLEMA 62

Alrededor de una mesa de 5 asientos se quiere ubicar 2 niños y 2 niñas de modo que el asiento vacío esté entre las niñas. ¿De cuántas maneras diferentes se podrá hacer?

- A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 7

PROBLEMA 63

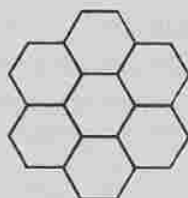
Ana, Betty y Cecilia van de campamento con 3 muchachos más. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar alrededor de una fogata si entre dos chicas hay un muchacho?

- A) 3 B) 6 C) 12
D) 20 E) 24

PROBLEMA 64

¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar las cifras del 3 al 9 en un tablero giratorio de la forma señalada, de modo que la cifra central sea par?

- A) 120
B) 240
C) 300
D) 360
E) 400



PROBLEMA 65

Se tiene n vasos diferentes, de ellos 6 deben ser llenados con limonada y los restantes con chicha, logrando obtenerse 28 formas de servido diferentes. ¿De cuántas maneras distintas se podría realizar el llenado si hubiera un vaso más y el servido sea 6 con limonada y 1 con gaseosa y el resto con chicha?

- A) 240 B) 250 C) 252
D) 260 E) 272

PROBLEMA 66

En un corral hay 10 jaulas diferentes, se han comprado 10 aves: 3 gallinas, 4 pavos y 3 patos. ¿De cuántas maneras distintas se puede colocar un ave en una jaula, de modo que se diferencien en su especie?

- A) $6!$ B) $7!$ C) $6 \times (7!)$
D) 4200 E) 2400

PROBLEMA 67

¿De cuántas maneras diferentes se puede permutar 2 bolas rojas, 3 bolas verdes y 4 bolas azules. Las bolas rojas se ubican en los extremos.

- A) 1260 B) 260 C) 140
D) 70 E) 35

PROBLEMA 68

La partida inaugural de un torneo de ajedrez puede ser jugada por 2 jugadores de 5 participantes previamente escogidos. ¿De cuántas formas pueden elegirse los jugadores?

- A) 5 B) 4 C) 10
D) 12 E) 20

PROBLEMA 69

En una juguetería se quiere ordenar en una vitrina 6 juguetes diferentes, disponiendo de 9

juguetes. ¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer?

- A) $6!$ B) $7!$ C) $4 \times (7!)$
D) $6 \times (7!)$ E) $12 \times (7!)$

PROBLEMA 70

En una caja hay 3 corbatas americanas, 4 corbatas inglesas y 5 corbatas nacionales. Determinar de cuántas maneras diferentes puede elegirse 3 corbatas de modo que haya una de cada tipo: americana, inglesa y nacional.

- A) $12!$ B) $5!$ C) $4!$
D) $\frac{5!}{2}$ E) $\frac{12!}{2}$

PROBLEMA 71

De la palabra EUCALIPTO se escogen 2 consonantes y 3 vocales diferentes. ¿Cuántas palabras de 5 letras pueden formarse sin que las palabras tengan necesariamente significado?

- A) $5!$ B) $6!$ C) $10(6!)$
D) $10(5!)$ E) $60(6!)$

PROBLEMA 72

¿De cuántas maneras diferentes se pueden comprar 3 refrescos en una tienda donde lo ofrecen en 4 sabores diferentes, sin mezclarlos?

- A) 12 B) 14 C) 8
D) 16 E) 20

PROBLEMA 73

Se tiene 30 fichas numeradas, las 10 primeras de color azul, numeradas de 1 al 10, las 10 siguientes de color blanco, también numeradas de 1 al 10 y las 10 últimas de color celeste igualmente numeradas de 1 al 10. ¿De cuántas formas diferentes se podrá tomar 3 fichas de

modo que sólo haya 2 fichas del mismo color?

- A) 720 B) 1440 C) 2000
D) 2700 E) 7200

PROBLEMA 74

Al lanzar 3 monedas y 2 dados. ¿De cuántas formas distintas se obtienen por lo menos 2 caras y puntajes que sumen más o igual a 10?

- A) 4 B) 6 C) 8
D) 12 E) 24

PROBLEMA 75

En cada lado de un triángulo se escogen 2 puntos diferentes (no se toman los vértices). ¿Cuántos triángulos se pueden formar con los puntos tomados en cada lado?

- A) 10 B) 6 C) 12
D) 15 E) 20

PROBLEMA 76

¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar 9 personas alrededor de una mesa redonda con 5 asientos si quedan 4 de pie?

- A) 3000 B) 3200 C) 3024
D) 1024 E) 1200

PROBLEMA 77

¿Cuántas sumas diferentes, de 3 sumandos cada una, se pueden obtener con los números 13, 27, 41, 53 y 35?

- A) 10 B) 12 C) 14
D) 15 E) 16

PROBLEMA 78

Carolina tiene 8 amigas de confianza y desea hacer una reunión. ¿De cuántas maneras diferentes puede invitar a 5 de ellas, si dos de ellas no se llevan bien y no asisten juntas?

- A) 12 B) 20 C) 24
D) 30 E) 36

PROBLEMA 79

César tiene 150 soles y desea hacer regalos a sus sobrinos. En una tienda encuentra artículos cuyo costo son: 25, 32, 47, 51 y 73 soles. ¿De cuántas maneras diferentes podrá comprar los regalos, si no se puede exceder de la cantidad que tiene?

- A) 10 B) 15 C) 18
D) 23 E) 20

PROBLEMA 80

Se quiere formar comisiones integradas por un doctor y 2 ingenieros de un grupo de 4 doctores y 6 ingenieros. ¿De cuántas maneras diferentes se podrá nombrar dicha comisión si cierto doctor rehúsa integrar la comisión estando el ingeniero A o el ingeniero B presente en dicha comisión? (A y B son parte de los 6 ingenieros señalados)

- A) 45 B) 46 C) 51
D) 65 E) 66

PROBLEMA 81

Una urna contiene 4 cifras numeradas 1, 2, 3, 4. Un experimento consiste en lanzar un dado y extraer una ficha de la urna. Señale la cantidad de elementos que posee el evento en el cual el valor de la ficha sea igual al puntaje del dado.

- A) 4 B) 6 C) 8
D) 12 E) 24

PROBLEMA 82

Se lanzan 3 dados simultáneamente. Señale cuántos elementos tendrá el evento en el cual la suma de los puntajes de los tres dados sea

menor a 5.

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

PROBLEMA 83

Dos equipos de baloncesto se enfrentan en un torneo que tiene el siguiente reglamento: no se considera empates y campeona el primer equipo que gana 2 partidos seguidos o un total de 3 partidos. ¿De cuántas formas se puede desarrollar la serie de partidos?

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

PROBLEMA 84

Tres empleados A, B y C, trabajan en una empresa. Se les asigna 2 oficinas numeradas 1 y 2. ¿Cuál es la probabilidad de que A y C no estén en la misma oficina?

- A) 0,75 B) 0,80 C) 0,50
D) 0,62 E) 0,85

PROBLEMA 85

En la final de un concurso escolar de matemática participan 6 alumnos de los cuales 3 son alumnos del colegio A. Si se premia a los dos primeros con regalos diferentes. ¿Cuál es la probabilidad de que los alumnos del colegio A obtengan los dos premios? No hay empates.

- A) 0,12 B) 0,15 C) 0,20
D) 0,25 E) 0,40

PROBLEMA 86

En una escuela se sortean 2 regalos iguales entre 5 niños y 3 niñas. Si se debe escoger al azar escribiendo los nombres en hojas de papel y sacándolas de una caja. ¿Cuál es la probabilidad que sean niñas las ganadoras?

- A) 1/7 B) 2/7 C) 3/28
D) 4/7 E) 1/28

PROBLEMA 87

Una caja contiene 5 bolas blancas, 3 bolas celestes y 2 amarillas. Se extrae aleatoriamente una bola. Determine $m + n$, si:

m = probabilidad de que sea blanca.
 b = probabilidad de que sea blanca o amarilla.

- A) 1,2 B) 1,1 C) 1,0
D) 0,9 E) 0,7

PROBLEMA 88

Se tiene 10 fichas, las 5 primeras de color azul numeradas de 1 al 5 y las 5 restantes blancas también numeradas del 1 al 5. Se colocan en una caja sacando una ficha y posteriormente otra más. Hallar la probabilidad de que ambas estén numeradas con el valor 1.

- A) $\frac{15}{44}$ B) $\frac{13}{42}$ C) $\frac{3}{7}$
D) $\frac{1}{45}$ E) $\frac{1}{17}$

PROBLEMA 89

Se tiene 5 libros, 3 de medicina y 2 de historia, ordenados en un estante. ¿Cuál es la probabilidad de que los libros de historia sean separados por los 3 libros de medicina?

- A) 0,20 B) 0,25 C) 0,30
D) 0,50 E) 0,10

PROBLEMA 90

Se escogen al azar 3 relojes de 15, de los cuales 6 son defectuosos. Señale la probabilidad de que se haya escogido 2 relojes defectuosos.

A) 17/19 B) 37/43 C) 30/91

D) 27/91 E) 17/43

PROBLEMA 91

En una tienda de plantas ornamentales hay 30 variedades de plantas, de las cuales 18 no florecen. ¿Cuál es la probabilidad de obtener por lo menos 3 plantas que florezcan, al escoger 4 plantas de diferentes variedades?

A) 31/201 B) 33/203 C) 41/203

D) 21/203 E) 41/201

PROBLEMA 92

De una baraja de 52 cartas, se extraen al azar 5 cartas. Determine la probabilidad de que 3 de ellas sean negras y las otras no.

A) 13/40 B) 1625/4998

C) 1325/4999 D) 16/49

E) 25/48

PROBLEMA 93

5 automóviles pueden ingresar a 3 playas de estacionamiento A, B y C. ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera playa, se encuentren 3 automóviles?

A) 37/243 B) 38/243 C) 13/81

D) 40/243 E) 41/243

PROBLEMA 94

3 jugadores de baloncesto, tienen las probabilidades de encestar: 0,2, 0,3 y 0,5 respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de ellos puedan encestar y el otro no?

A) 0,10 B) 0,12 C) 0,20

D) 0,22 E) 0,30

PROBLEMA 95

José debe viajar a Arequipa mañana. La pro-

babilidad de que elija la línea A de transporte es 0,3; si solo hay tres líneas de transporte A, B y C. ¿Cuál es la probabilidad de que elija la línea B si la probabilidad de que no elija la línea C es 0,6?

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3

D) 0,4 E) 0,5

PROBLEMA 96

De la siguiente serie de números 1,2,3,4 ..., 40, se escoge un número al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea impar o múltiplo de 3?

A) 0,52 B) 0,56 C) 0,60

D) 0,65 E) 0,75

PROBLEMA 97

Seis personas se sientan al azar, alrededor de una fogata. ¿Cuál es la probabilidad que 3 personas ocupen lugares continuos?

A) 0,3 B) 0,4 C) 0,6

D) 0,7 E) 0,9

PROBLEMA 98

6 empleados de una empresa, han dejado sus tarjetas de identidad en una caja que no contiene nada más. Al terminar el día, cogen sus tarjetas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 de los empleados elijan sus tarjetas correctas?

A) 1/12 B) 1/8 C) 1/6

D) 1/24 E) 3/35

PROBLEMA 99

Se tiene 2 urnas, la primera contiene 3 bolas azules y 2 blancas, la otra contiene 2 bolas azules y 4 blancas. Se lanza una moneda. Si se obtiene cara se saca una bola de la primera urna, si sale sello se saca una bola de la segunda urna. Hallar la probabilidad de sacar

una bola azul?

A) 7/16 B) 7/14 C) 7/15

D) 5/17 E) 5/16

PROBLEMA 100

Un lote de 10 televisores tiene 4 defectuosos. Se toma al azar cinco televisores del lote uno tras otro sin sustitución. ¿Cuál será la probabilidad de que el primero, el tercero y el último sean defectuosos?

A) 1/10 B) 1/21 C) 2/35

D) 1/42 E) 3/28

PROBLEMA 101

Se escoge aleatoriamente un número de 10 cifras, cuya suma de sus cifras es 88. Calcular la probabilidad que sea par.

A) 3/11 B) 3/5 C) 9/55

D) 9/11 E) 9/5

PROBLEMA 102

De una urna que contiene 3 bolas blancas, 4 verdes y 3 rojas, se extraen aleatoriamente 2 bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las bolas sea de color rojo o sea de distinto color?

A) 2/15 B) 1/15 C) 1/5

D) 4/15 E) 14/15

PROBLEMA 103

Dado un conjunto no nulo A, la probabilidad de que al escoger aleatoriamente uno de sus subconjuntos resultando binario, es 5/16. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un subconjunto propio?

A) 15/16 B) 30/31 C) 31/32

D) 5/32 E) 63/64

PROBLEMA 104

Se elige un comité de 6 personas de un grupo de 7 hombres y 3 mujeres. Calcular la probabilidad de que en dicho comité haya una mujer por lo menos.

A) 1/70 B) 69/70 C) 1/30

D) 29/30 E) 2/15

PROBLEMA 105

Se escriben todas las palabras posibles de 8 letras, empleando todas las letras de la palabra MEDICINA. Señale la probabilidad de que la letra I aparezca al inicio y al final.

A) 1/28 B) 1/3 C) 1/4

D) 3/4 E) 1/7

PROBLEMA 106

Se tiene 10 tarjetas numeradas del 1 al 10. Si extraen aleatoriamente 3 de estas tarjetas. Calcule la probabilidad de que los 3 números de las tarjetas sean crecientes consecutivos o impares o pares.

A) 3/4 B) 7/12 C) 7/30

D) 3/17 E) 4/17

PROBLEMA 107

Una señora tiene 12 amigos y desea organizar una reunión en la que participen 8 o 7 de ellos. Calcular la probabilidad de hacer una invitación correcta, si 3 de los amigos mencionados no pueden estar a la vez en la reunión, ni siquiera 2 de ellos.

A) 3/5 B) 2/5 C) 13/55

D) 8/7 E) 2/13

PROBLEMA 108

Se desea colocar en una misma fila 8 banderas de las cuales 5 son amarillas y 3 son blancas. Calcular la probabilidad de que las banderas de

los extremos resulten de color diferente.

- A) 16/28 B) 15/28 C) 1/2
D) 16/19 E) 14/19

PROBLEMA 109

Una caja contiene 8 bolas rojas y 4 azules. Se lanza un dado y se extrae 3 bolas si resulta par el puntaje del dado o 2 bolas si es impar. Señale la probabilidad de que todas las bolas extraídas sean azules.

- A) 1/55 B) 2/55 C) 3/55
D) 4/55 E) 1/11

PROBLEMA 110

Se escoge aleatoriamente un número de 15 cifras que suman 133. Señale la probabilidad de que resulte un número capicúa.

- A) 1/3 B) 1/5 C) 2/3
D) 3/5 E) 1/15

PROBLEMA 111

Luis ingresa al cine, se ubica en una fila donde hay 10 asientos desocupados y elige uno que no es ningún extremo. Pasados 5 minutos observa que hay 3 personas más en la misma fila. Calcular la probabilidad de que los lugares vecinos al de Luis estén desocupados.

- A) 1/7 B) 1/3 C) 5/12
D) 1/6 E) 1/576

PROBLEMA 112

Un lote de 50 tornillos contiene 2 tornillos defectuosos. Si se prueban los tornillos uno a uno. ¿Cuál es la probabilidad de que el último defectuoso se encuentre en la tercera prueba?

- A) 2/1225 B) 1/125 C) 2/49
D) 3/1000 E) 4/17

PROBLEMA 113

En una ánfora se colocan bolas numeradas, con todos los números de 3 cifras. Si se extrae un bolo. ¿Cuál es la probabilidad de no extraer un número capicúa?

- A) 10% B) 30% C) 40%
D) 45% E) 90%

PROBLEMA 114

La probabilidad de que Sonia estudie Inglés es 0,75 y la probabilidad de que estudie Francés es 0,50. Si la probabilidad de que estudie Inglés o Francés es 0,85. ¿Cuál será la probabilidad de que estudie ambos a la vez?

- A) 0,2 B) 0,3 C) 0,4
D) 0,5 E) 0,6

PROBLEMA 115

Un grupo de 6 hombres y 6 mujeres es dividido aleatoriamente en 2 grupos de 6 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos grupos estén formados por parejas?

- A) 0,43 B) 0,72 C) 0,63
D) 0,91 E) 0,12

PROBLEMA 116

En el cumpleaños de Cecilia, asisten 60 personas de las cuales 4 mujeres tienen 17 años, 16 mujeres no tienen 17 años, 14 mujeres no tienen 18 años, 10 hombres no tienen 17 ni 18 años. Si se escoge una persona al azar y resultó ser hombre. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga 17 ó 18 años?

- A) 0,6 B) 0,8 C) 0,75
D) 0,72 E) 0,56

PROBLEMA 117

De un grupo de estudiantes, la probabilidad de no llevar matemática es 0,49 y la probabilidad

de no llevar física es 0,53. Si la probabilidad de no llevar matemática ni física es 0,27. ¿Cuál es la probabilidad de llevar sólo uno de los cursos?

- A) 0,41 B) 0,43 C) 0,45
D) 0,46 E) 0,49

PROBLEMA 118

Ocho amigos juegan al golf, 5 jóvenes y 3 adultos. Si los jóvenes tienen la mitad de habilidad de los adultos. ¿Cuál es la probabilidad que un joven gane?

- A) 5/8 B) 5/9 C) 1/2
D) 5/11 E) 5/13

PROBLEMA 119

De un mazo de 52 cartas, se retira una carta negra, luego se extrae aleatoriamente 13 cartas, calcular la probabilidad que si todos son del mismo color, ellas sean rojas.

- A) 1/2 B) 2/3 C) 1/3
D) 1/4 E) 3/4

PROBLEMA 120

De los alumnos que estudian en una universidad se observó que la probabilidad que tiene un alumno para estudiar los cursos A, B y C son 8/25, 11/50 y 9/20 respectivamente. Además la probabilidad de que estudie los 3 cursos es del 10%. ¿Cuál es la probabilidad de estudiar simultáneamente dos cursos? Si la probabilidad de estudiar por lo menos un curso es 0,55

- A) 0,20 B) 0,24 C) 0,32
D) 0,44 E) 0,40

PROBLEMA 121

Tres alumnos: A, B y C quieren resolver un problema. La probabilidad de que el alumno A resuelva este problema es de 3/5, de B es

1/2 y la de C es de 2/3. Si los 3 tratan de resolverlo juntos. ¿Cuál es la probabilidad de que el problema sea resuelto?

- A) 12/13 B) 13/14 C) 14/15
D) 15/16 E) 16/17

PROBLEMA 122

Dos de tres elementos de una calculadora que funcionan independientemente, fallaron. Hallar la probabilidad de que hayan fallado los elementos primero y segundo, si las probabilidades de falla de los elementos primero, segundo y tercero son respectivamente iguales a $P_1 = 0,3$, $P_2 = 0,25$, $P_3 = 0,4$.

- A) 0,21 B) 0,25 C) 0,29
D) 0,31 E) 0,37

PROBLEMA 123

En una caja hay 20 bolas numeradas del 1 al 20. Se extrae al azar una bola. ¿Cuál es la probabilidad que el número de la bola extraída sea mayor a 14?

- A) 15% B) 20% C) 24%
D) 30% E) 36%

PROBLEMA 124

Entre los estudiantes de un instituto se observa que el 5% de los hombres y el 3% de las mujeres tienen ojos azules. Además el 30% de los estudiantes son mujeres. Si se elige al azar un estudiante y se observa que tiene ojos azules. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

- A) 35/44 B) 9/44 C) 35/43
D) 18/43 E) 3/100

PROBLEMA 125

A un seminario de informática, asisten 66 profesionales; los varones que son ingenieros son tantos como mujeres arquitectas hay, además

el número de mujeres que son ingenieras es tres veces el número de varones que son arquitectos. Si se elige aleatoriamente a uno de los asistentes resultando ser mujer. ¿Cuál es la probabilidad de que sea arquitecta, Si en total hay 45 mujeres?

- A) $1/5$ B) $2/5$
C) $3/4$ D) $1/2$
E) $1/3$

PROBLEMA 126

Durante todas las noches del mes de Enero, Silvia escucha música o lee un libro. Escucha música 21 noches y lee un libro 15 noches. Si se elige una de esas noches al azar y Silvia escucha música. ¿Cuál es la probabilidad de que lea un libro?

- A) $5/31$ B) $1/3$
C) $2/3$ D) $5/21$
E) $16/21$

PROBLEMA 127

Andrés, Beto y Carlos ejecutan un penal, las probabilidades que tienen para hacer gol son $1/3$, $1/2$, y $1/4$ respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos haga un gol?

- A) $1/2$ B) $1/3$ C) $1/4$
D) $3/4$ E) $2/3$

PROBLEMA 128

Un circuito electrónico consta de dos transis-

tores A y B, la probabilidad que falle A es 0,3, que fallen ambos es 0,25 y que falle sólo B es 0,4. Señale la probabilidad de que falle A sabiendo que falló uno de los dos, A ó B.

- A) $2/7$ B) $4/7$
C) $3/7$ D) $5/14$
E) $1/2$

PROBLEMA 129

La probabilidad de que Diana estudie para el examen de ingreso es 0,3. Si estudia, la probabilidad de que ingrese es 0,7, pero si no estudia, la probabilidad es sólo de 0,4. Si Diana ingresó. ¿Cuál es la probabilidad de que haya estudiado?

- A) $1/2$ B) $1/3$
C) $3/4$ D) $3/7$
E) $4/7$

PROBLEMA 130

En un reunión familiar, se observó en un determinado momento que los $4/15$ de los asistentes eran mujeres que no fuman mientras que el 44% de los hombres fuma y la mujeres son los $4/9$ del total de asistentes. Se elige al azar a uno de los asistentes. Dado que la persona elegida fuma. ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre?

- A) $7/11$ B) $11/3$
C) $13/17$ D) $11/19$
E) $7/13$



SOLUCIONARIO

◆◆ Análisis Combinatorio

RESOLUCIÓN 1

Buscamos reducir la expresión que figura en el numerador:

$$N = \frac{8! \times 49 + 9! \times 4 + 8! \times 5}{\text{Sumamos}}$$

$$N = \frac{8! \times 54 + 9! \times 4}{9 \times 6} = \frac{8! \times 9 \times 6 + 9! \times 4}{9!} \quad (\text{propiedad})$$

$$N = \frac{9! \times 6 + 9! \times 4}{\text{Sumamos}} = 9! \times 10 = 10!$$

En forma similar se reduce el denominador

$$D = \frac{7! \times 36 - 8! \times 8 + 7! \times 100}{\text{sumamos}}$$

$$D = \frac{7! \times 136 - 8! \times 8}{8 \times 17}$$

$$D = \frac{7! \times 8 \times 17 - 8! \times 8}{8!} = \frac{8! \times 17 - 8! \times 8}{8!} \quad (\text{restamos})$$

$$D = 8! \times 9 = 9!$$

$$\text{Reemplazando: } M = \frac{N}{D} = \frac{10!}{9!}$$

$$\therefore M = \frac{10 \times 9!}{9!} = 10$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 2

Se observa que el valor que aparece en el denominador es 2 unidades mayor del que aparece en el numerador.

$$\text{Recordando } n! = n \times (n-1) \times (n-2) \dots$$

Luego:

$$2! = 2 \times 1 \times 0!$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1!$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2!$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$20! = 20 \times 19 \times 18!$$

Al reemplazar:

$$A = \frac{0!}{2 \times 1 \times 0!} + \frac{1!}{3 \times 2 \times 1!} + \frac{2!}{4 \times 3 \times 2!} + \dots + \frac{18!}{20 \times 19 \times 18!}$$

Simplificando:

$$A = \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3} + \dots + \frac{1}{20 \times 19}$$

Lo cual es una expresión que debe ser recordada; cada fracción se puede expresar como la diferencia de dos fracciones de denominadores consecutivos:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right)$$

Al efectuar, se eliminan las fracciones, salvo la unidad y la última fracción

$$A = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} = 0,95$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 3

Observando la expresión que está en el paréntesis, se observa 25! y 23! términos que son próximos, luego se recuerda:

$$25! = 25 \times 24 \times (23!)$$

también encontramos $9!$ y $12!$

Luego:

$$12! = 12 \times 11 \times 10 \times (9!)$$

Reemplazamos en el ():

$$(\) = \frac{11 \times 25 \times 24 \times (23!) \times (9!)}{12 \times 11 \times 10 \times (9!) \times 5 \times (23!)}$$

Se eliminan los factores: 11 , $(23!)$ y $(9!)$

$$(\) = \frac{25 \times 24}{12 \times 10 \times 5} = \frac{600}{600} = 1$$

Conocido el valor $(\) = 1$, lo ubicamos en la expresión original:

$$R = [(1)^{2+1} + 1!]$$

Recordando que: $2! = 2$ y $1! = 1$

$$R = [1^2 + 1]! = [2]! = 2! = 2$$

$$\therefore R = 2$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 4

Debemos tener presente la siguiente tabla:

$0! = 1$	$4! = 24$
$1! = 1$	$5! = 120$
$2! = 2$	$6! = 720$
$3! = 6$	$7! = 5040$

Como $m < b$ (1 cifra), la suma $\overline{ab} + m$, no podrá ser 120 ($5!$), las cifras a y b son menores a 5.

Además, para que la suma de los factoriales llegue a tener 2 cifras ($\overline{ab}$) una de las cifras (a ó b) tendrá que ser mayor a 3, esto es igual a 4.

* Si: $a = 4$: $\frac{\overline{4b} + m}{\text{Aproximado } 40} = \frac{4! + b!}{24 + b!}$

Para que cumpla lo anterior: $b = 4$

Se tendría:

$$44 + m = 4! + 4! = 48$$

$$m = 4$$

No cumple con: $m < b$

** Si: $b = 4$: $\overline{a4} + m = a! + 4!$

a debe ser menor a 4, si no se repite lo anterior.

$a = 3$: se obtiene $m = -4$ (No)

$a = 2$: se obtiene $m = 2$ (Si)

$a = 1$: se obtiene $m = 11$ (No)

Sólo: $a = 2$, $b = 4$, $m = 2$

$$\frac{a+b}{m} = \frac{2+4}{2} = 3$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 5

La expresión: $(a! + 1)!$ se repite en varias ocasiones entonces, para hacerla más sencilla:

$$n = (a! + 1)!$$

Luego, se tendría:

$$\frac{[(n-1)!]^2}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{n \times 42 \times (n+1)!}$$

Tomamos la multiplicación en aspa

Donde:

$$42 \times (n+1) \times n \times [(n-1)! \times (n-1)!]$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{n!}$$

$$(n+1)!$$

$$= 42 \times (n+1)! \times (n-1)!$$

$$\Rightarrow 42 \times (n+1)! \times (n-1)! = (n+1)! \times (n+1)!$$

$$42 \times (n+1)! = (n+1) \times n \times (n-1)!$$

$$7 \times 6 = (n+1)n$$

$$\therefore n = 6$$

De lo anterior: $n = \frac{(a! + 1)!}{3} = 6$

Se obtiene: $a! + 1 = 3$

$$a! = 2$$

Sólo $a = 2$

Luego: $a + a! + (a!)! = 2 + 2 + 2 = 6$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 6

Como el menor valor que aparece con factorial es $(\overline{ab} - 1)!$, los demás lo expresamos según este valor:

$$\overline{ab}! = \overline{ab} \times (\overline{ab} - 1)!$$

$$(\overline{ab} + 1)! = (\overline{ab} + 1) \times \overline{ab} \times (\overline{ab} - 1)!$$

Reemplazando:

$$= \frac{(\overline{ab} - 1)! + \overline{ab} \times (\overline{ab} - 1)! + (\overline{ab} + 1) \times \overline{ab} \times (\overline{ab} - 1)!}{(\overline{ab} - 1)! \times (\overline{ab} + 1)}$$

Simplificando:

$$= \frac{(1 + \overline{ab} + (\overline{ab} + 1) \overline{ab})}{(\overline{ab} + 1)}$$

Al efectuar:

$$(1 + 2\overline{ab} + \overline{ab}^2) = (\overline{ab} + 1)^2$$

$$= \frac{(\overline{ab} + 1)^2}{\overline{ab} + 1} = \overline{ab} + 1 = n!$$

Tiene 2 cifras

Sólo $n = 4$: $4! = 24 = \overline{ab} + 1$

$$\therefore \overline{ab} = 23$$

Luego: $a + b + n = 2 + 3 + 4 = 9$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 7

Encontramos los valores que están en paréntesis

$$1 \Delta 2 = 2! - 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Se hace corresponder esa} \\ \text{expresión porque } 1 < 2 \end{array} \right.$$

$$1 \Delta 2 = 1$$

$$2 \Delta 1 = 2! + 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Se mantiene el orden según} \\ \text{como lo ha definido el pro-} \\ \text{blema } 2 > 1 \end{array} \right.$$

$$2 \Delta 1 = 3$$

Reemplazando:

$$\frac{2 \Delta (1 \Delta 2)}{1 \Delta (2 \Delta 1)} = \frac{2 \Delta 1}{1 \Delta 3}$$

Faltaría encontrar $1 \Delta 3$, el otro valor ya se ha conocido

$$1 \Delta 3 = 3! - 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Según lo definido} \\ 1 < 3 \end{array} \right.$$

$$1 \Delta 3 = 5$$

Finalmente:

$$\frac{2 \Delta 1}{1 \Delta 3} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Rpta. E

RESOLUCIÓN 8

Según la expresión, los valores no pueden ser muy grandes

Tomamos que uno de ellos sea 1

$$a = 1 : (1!)^{b!} \times b!^{1!} = b! = \overline{mnpq}$$

$$\text{Sólo si } b = 7 \text{ (No cumple)}$$

Consideremos que sea 2

$$a = 2 : (2!)^{b!} \times (b!)^{2!} = 2^{b!} \times b!^2 = \overline{mnpq}$$

$$\text{Si } b = 2 : 2^2 \times 2^2 = 16 \quad (\text{No})$$

$$\text{Si } b = 3 : 2^{3!} \times 3!^2 = 2^6 \times 6^2 = 2304 \text{ (Si)}$$

Si $b = 4 : 2^{4!} \times 4!^2 = 2^{24} \times 24^2 =$ Más de 4 cifras (No)

Para valores mayores, la expresión pasa de 4 cifras.

Luego:

$$a = 2 ; b = 3 \Rightarrow (a+b)! = 5! = 120$$

$$\text{Suma de cifras: } 1+2+0 = 3$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 9

Se conoce que:

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

$$7! = 5040$$

Si alguna de las cifras fuera 7 ó mayor a 7, su factorial respectivo tendría 4 o más cifras, pero el problema sólo señala 3 cifras.

Luego: $a, b, c < 7$

Si alguna cifra fuera 6, su factorial sería 720, empieza en 7, lo que indicaría que habría alguna otra cifra que sería 7 (o mayor a 7), lo que contradice lo anterior, luego, debe ser diferente a 6.

Si alguna cifra es 5 : $5! = 120$, se tendría que la primera cifra es 1.

$$a = 1 : \overline{1bc} = 1! + b! + c! = 1 + b! + c!$$

Una de las cifras restantes es 5:

$$\text{Si } b = 5 : \overline{15c} = 1 + 5! + c! = 121 + c!$$

No hay valor de c que cumpla

$$\text{Si } c = 5 : \overline{1b5} = 1 + b! + 5! = 121 + b!$$

Sólo cumple $b = 4$

$$\text{Finalmente } \overline{abc} = 145 = 1! + 4! + 5!$$

$$\text{Se desea hallar } 1 \times 4 \times 5 = 20$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 10

La suma respectiva se puede abreviar en una multiplicación:

$$S_k = \underbrace{k! + k! + \dots}_{k \text{ sumandos}} = k \times k! \quad \begin{array}{l} \text{A este factor } k \text{ le} \\ \text{sumamos y restamos 1} \end{array}$$

$$S_k = (k+1-1) \times (k!) = \underbrace{(k+1) \times k!}_{(k+1)!} - (1) \times k! \quad \text{Distributiva}$$

$$S_k = (k+1)! - k!$$

$$\text{Tomamos } k = 1, 2, 3, \dots, 20$$

$$k = 1 : S_1 = 2! - 1!$$

$$k = 2 : S_2 = 3! - 2!$$

$$k = 3 : S_3 = 4! - 3!$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$k = 20 : S_{20} = 21! - 20!$$

Sumamos las igualdades señaladas

$$\underbrace{S_1 + S_2 + \dots + S_{20}}_S = (2! + 3! + \dots + 21!) - (1! + 2! + \dots + 20!)$$

$$\text{Luego: } S = 21! - 1$$

Rpta. E

RESOLUCIÓN 11

Se conoce que: $\overline{ab}! = \overline{ab} \times (\overline{ab} - 1)!$

Al reemplazar en la expresión de la izquierda:

$$\frac{[\overline{ab} \times (\overline{ab} - 1)!] \times (\overline{ab} - 1)!}{[\overline{ab} \times (\overline{ab} - 1)!] \times (\overline{ab} - 1)!} = \frac{cbdb \times \overline{ab} \times (\overline{ab} - 2)!}{(\overline{ab} - 1)!}$$

Simplificamos: $(\overline{ab} - 1)!$

$$\frac{\overline{ab} \times (\overline{ab} - 1)!}{(\overline{ab} - 1)!} = \overline{cbdb} \times \overline{ab} \times (\overline{ab} - 2)!$$

A su vez:

$$(\overline{ab} - 1)! = (\overline{ab} - 1) \times (\overline{ab} - 2) \times (\overline{ab} - 3)!$$

Reemplazamos y simplificamos:

$$\frac{\overline{ab} \times (\overline{ab} - 1) \times (\overline{ab} - 2) \times (\overline{ab} - 3)!}{(\overline{ab} - 1)!} = \overline{cbdb} \times \overline{ab} \times (\overline{ab} - 2)!$$

Se tendrá:

$$(\overline{ab} - 3)! = \overline{cbdb}$$

El único factorial que da 4 cifras es 7!

$$7! = 5040 = \overline{cbdb} = (\overline{ab} - 3)!$$

$$c = 5, b = 0, d = 4$$

$$7 = \overline{ab} - 3 \Rightarrow \overline{ab} = 10$$

$$a = 1, b = 0$$

Luego:

$$a + b + c + d = 1 + 0 + 5 + 4 = 10$$

Rpta. E

RESOLUCIÓN 12

Observando cada factor que aparece entre paréntesis:

Primer término:

$$\frac{3! - 1! \times 3}{3!} = 1 - \frac{1! \times 3}{1! \times 2 \times 3} = 1 - \frac{1}{2}$$

Segundo término:

$$\frac{4! - 2! \times 4}{4!} = 1 - \frac{2! \times 4}{2! \times 3 \times 4} = 1 - \frac{1}{3}$$

Simplificando cada término directamente

$$\text{Tercer término: } 1 - \frac{1}{4}$$

$\vdots$

$$\text{Último término: } 1 - \frac{1}{20}$$

Reemplazando:

$$Y = (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times \dots \times (1 - \frac{1}{20})$$

$$= (\frac{1}{2}) \times (\frac{2}{3}) \times (\frac{3}{4}) \times \dots \times (\frac{19}{20})$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{20} = 0,05$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 13

Desarrollando las sumatorias indicadas como A y B.

$$A = \sum_{k=1}^{10} (k!) (k+2) = 1! \times 3 + 2! \times 4 + 3! \times 5 + \dots + 10! \times 12$$

$$B = \sum_{k=1}^{10} (k+1)! = 2! + 3! + 4! + \dots + 11!$$

Pero B:

$$= 1! \times 2 + 2! \times 3 + 3! \times 4 + \dots + 10! \times 11$$

Luego:

$$A - B = 1! (3 - 2) + 2! (4 - 3) + 3! (5 - 4) + \dots + 10! (12 - 11)$$

Se observa:

$$A - B = 1! + 2! + 3! + \dots + 10!$$

expresado como sumatoria:

$$A - B = \sum_{k=1}^{10} k!$$

Dividiendo entre C:

$$\frac{A-B}{C} = \frac{\sum_{k=1}^{10} k!}{\sum_{k=1}^{10} k!} = 1$$

Nota: También:

$$A-B = \sum_{k=1}^{10} (k!) (k+2) - \sum_{k=1}^{10} (k+1)!$$

La sumatoria tiene los mismos límites.

Luego se puede expresar como una sola:

$$A-B = \sum_{k=1}^{10} [(k!)(k+2) - (k+1)!]$$

$$A-B = \sum_{k=1}^{10} [(k!)(k+2 - (k+1))] = \sum_{k=1}^{10} (k!)(1)$$

$$A-B = \sum_{k=1}^{10} k!$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 14

Recuerde: $\prod_{k=1}^{14} t_k = t_1 \times t_2 \times t_3 \dots t_{14}$

Se multiplican los valores de t_k , luego hay que simplificarlo lo más posible.

$$t_k = \frac{(k+3)! \times (k+1)!}{k! \times (k+4)!} + 2$$

Convenientemente cambiamos $(k+1)!$ y $(k+4)!$

$$t_k = \frac{(k+3)! \times k! \times (k+1)}{k! \times (k+3)! \times (k+4)} + 2$$

$$t_k = \frac{k+1}{k+4} + 2 = \frac{(k+1) + 2(k+4)}{k+4} = \frac{3(k+3)}{k+4}$$

Luego:

$$t_1 = 3\left(\frac{4}{5}\right), t_2 = 3\left(\frac{5}{6}\right), t_3 = 3\left(\frac{6}{7}\right), \dots$$

$$\dots t_{14} = 3\left(\frac{17}{18}\right)$$

Reemplazando:

$$P = \prod_{k=1}^{14} t_k = 3\left(\frac{4}{5}\right) \times 3\left(\frac{5}{6}\right) \times 3\left(\frac{6}{7}\right) \times \dots \times 3\left(\frac{17}{18}\right)$$

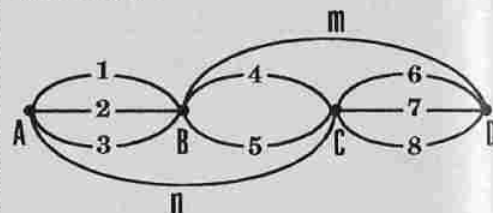
$$P = 3^{14} \times \frac{4}{18} = 3^{12} \times \frac{2}{9} \times \frac{2}{2} = 3^{12} \times 2$$

$$P = 3^{12} \times 2 = 3^{12} (3-1) = 3^{13} - 3^{12}$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 15

Para identificar mejor, señalamos un nombre a cada camino:



Veamos por tramos:

(I) **AB**: Para llegar a **B**, se puede utilizar cualquiera de los 3 caminos (1, 2, 3) señalados. De **B** a **D**, se puede ir por el camino **m**, luego habría 3 formas de llegar: 1 m, 2 m, 3 m.

$\Rightarrow 3$ formas (No son las únicas)

(II) **AC**: Para llegar a **C** se puede utilizar algún camino para llegar a **B** (1, 2, 3) y luego otro camino para **C** (4, 5).

De **A** a **B**, de **B** a **C** $\Rightarrow$ De **A** a **C**

3 formas 2 formas 3×2 formas

Habrían 6 formas (pasando por B)

pero también hay uno directo (n)

de **A** a **C** se tiene $6+1 = 7$ formas y de **C** a **D** hay 3 caminos (6, 7, 8)

De **A** a **C**, De **C** a **D** $\Rightarrow$ De **A** a **D**

7 formas 3 formas 7×3 formas

$\Rightarrow 21$ formas

Finalmente de (I) y (II):

$3+21 = 24$ formas

Rpta. C

RESOLUCIÓN 16

Veamos brevemente (recordando)

* Si fuera una sola letra, digamos **A**, habría una sola forma: **A**

* Si fueran dos letras: **A**, **M** esta última (**M**) podría colocarse a su derecha o izquierda: **AM**, **MA** } 2 formas

* Si fueran tres letras: **A**, **M**, **T**, esta última (**T**) podría estar a la derecha, centro o izquierda de las otras dos, que a su vez se ordenaban de 2 formas:

AMT, **ATM**, **TAM**

MAT, **MTA**, **TMA**

6 formas

* Sin necesidad de escribir las formas siguientes, al agregar la última letra, ésta podrá colocarse a la derecha, entre las dos últimas, entre las dos primeras o a la izquierda son 4 posiciones posibles que deben tener en cuenta las 6 formas en que se ordenen las 3 letras anteriores:

4×6 formas = 24 formas

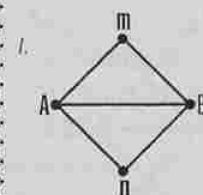
En forma Práctica:

$$\begin{aligned} 1 \text{ forma} &= 1! \\ 1 \times 2 \text{ formas} &= 2! \\ 1 \times 2 \times 3 \text{ formas} &= 3! \\ 1 \times 2 \times 3 \times 4 \text{ formas} &= 4! \end{aligned}$$

Rpta. E

RESOLUCIÓN 17

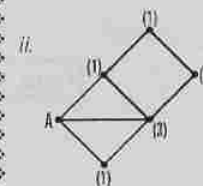
Tomamos por partes:



Para llegar a **B** hay 3 formas.

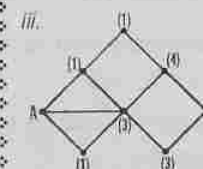
Para llegar a los puntos **m**, **n** sólo hay una forma posible.

En cada parte que contamos, indicamos con paréntesis la cantidad de formas para llegar a un punto.



Nótese que el vértice superior sólo se llega por una línea por ello aparece (1)

Para el vértice de la derecha, hay sólo dos caminos que llegan a él, pero uno viene de donde se llega de 3 formas y del otro de una forma, luego $3+1 = 4$ formas.

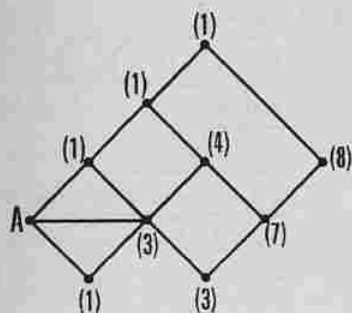


El nuevo vértice inferior se une por un camino al punto que tiene 3 formas. Para llegar (B), éste mantiene las 3 formas.

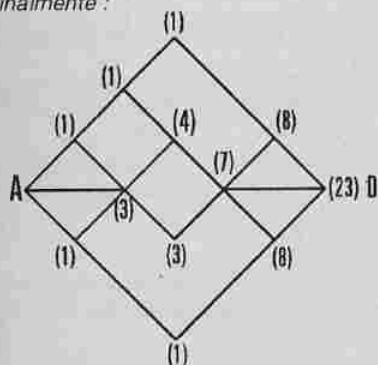
Al nuevo vértice de la derecha se llega por dos caminos: uno de 4 formas y el otro de 3.

Luego $4+3 = 7$ formas

iv.



v. Finalmente :



De A a D hay 23 formas de llegar

Rpta. D

RESOLUCIÓN 18

Se desea obtener :

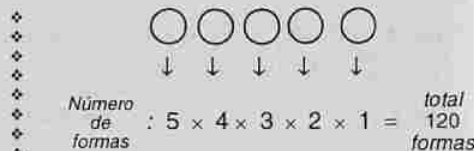


La primera letra puede ser cualquiera de las cinco, habría 5 formas a elegir.

La segunda letra, sólo tomaría 4 formas, ya que debe ser diferente a la primera.

La tercera letra, similar, sólo 3 formas debe ser diferente a la primera y segunda.

Describimos brevemente :



Rpta. D

RESOLUCIÓN 19

De la palabra NUMEROS se tiene :

Consonantes : N, M, R, S

Vocales : U, E, O

Para elegir una consonante :

(C) → Habría 4 formas posibles (N, M, R, S)

Para elegir una vocal :

(V) → habría 3 formas posibles (U, E, O)

Luego, en la selección de consonante y vocal :

(C) (V)
↓ ↓
4 formas x 3 formas = 12 formas

Rpta. C

RESOLUCIÓN 20

Primero escogemos 2 vocales de la palabra ESQUILMAR, puede ser E, U, I, A.

Siendo 4 vocales, una podría tomar alguna de las 4 y la otra tomaría 3, podría decirse que hay :
 $4 \times 3 = 12$ formas

¡Atención! Sólo estamos eligiendo, no designando la ubicación definitiva, luego la pareja E U se repite como U E, similar E I, se repite como I E, etc.

Cada pareja se repite 2 veces, luego como hay 12 formas, significa que habrá :

$$\frac{12}{2} = 6 \text{ parejas que no se repiten.}$$

Veamos las consonantes : S, Q, L, M, R.

Se debe escoger 3 de ellas (no su ubicación)

Habrían:
 $5 \times 4 \times 3 = 60$ formas
Pero debemos tener en cuenta que en la elección hay problemas.

Observe la tema : S Q L, Q L S, L Q S

S L Q, Q S L, L S Q

las temas se repiten 6 veces, luego como había 60 formas, se tendrá:

$$\frac{60}{6} = 10 \text{ temas sin repetir}$$

Para elegir :

2 vocales → 6 maneras
3 consonantes → 10 maneras
 $6 \times 10 = 60$

Para formar la palabra de 5 letras :



$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Si interesa la ubicación

Finalmente :

Elegir y Ordenar

$$60 \quad 120 \Rightarrow \text{Total} = 60 \times 120 = 7200 \text{ formas}$$

Rpta. E

RESOLUCIÓN 21

El primero puede elegir cualquiera de las 10 comidas que le ofrecen, luego su pedido podrá hacerlo de 10 formas.

El segundo ya no puede elegir lo que pidió el

primero, le queda sólo 9 comidas posibles. Su pedido se podrá hacer de 9 formas.

$$\text{Número total de formas} = 10 \times 9$$

$$\therefore \text{Número total de formas} = 90 \text{ formas}$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 22

Digamos que las 7 personas están de pie.

El primer asiento del sofá, puede ser ocupado por cualquiera de las 7 personas que están de pie, hay 7 maneras de ocuparlo.

El segundo asiento ya no puede ser ocupado por la persona que se sentó, sólo por las 6 personas que han quedado de pie, le quedan 6 maneras de ocuparlo.

Señalemos el esquema siguiente :



Rpta. E

RESOLUCIÓN 23

Sean los nombres de las personas A, B, C, D donde A y B saben conducir.

Si A conduce (ocupa 1 asiento) :

B puede elegir cualquiera de los 5 asientos que quedan

C puede ocupar 4

D puede ocupar 3

$$\text{Número de formas} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Si B conduce ; le ocurrirá similar a lo anterior

$$\text{Número de formas} = 60$$

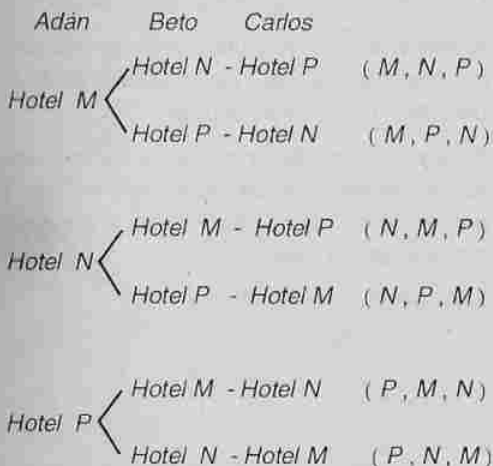
Considerando ambos casos

$$\Rightarrow \text{Total} = 60 + 60 = 120 \text{ formas}$$

Rpta. C

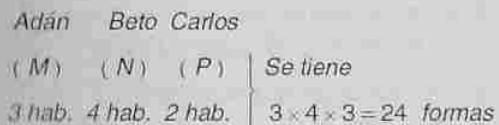
RESOLUCIÓN 24

Primero veamos la elección del hotel, señalando en un diagrama de árbol, los hoteles M, N y P.

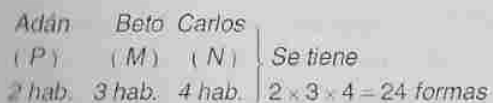


Se observa que la elección del hotel son las diferentes ordenaciones que se pueden hacer con M, N y P, esto es $3 \times 2 \times 1 = 6$ formas.

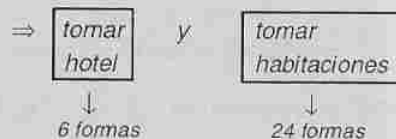
Ahora, tomar una habitación. Consideremos una de las formas señaladas.



Si se considera otra forma:



Es decir que en cada caso hay 24 formas



Finalmente $6 \times 24 = 144$ formas

Rpta. E

RESOLUCIÓN 25

Realizando el cálculo indirecto:

- i. Calculamos el total de maneras que 5 personas (3 hombres y 2 mujeres) pueden ubicarse en 5 butacas:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$$

Pero en este total, está incluido cuando las mujeres están juntas y cuando no lo están.

- ii. Determinemos cuando las mujeres están juntas.

Se considera que las dos mujeres juntas es un solo miembro, luego dejarían de ser 5 y se tomaría 4:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$$

Pero las mujeres pueden cambiar sus ubicaciones, estando juntas de 2 formas, por ejemplo AB y BA.

Luego el total de formas en que las mujeres se sientan juntas es: $2 \times 24 = 48$

Finalmente:

total de maneras que se sientan 5 personas	=	número de mujeres juntas	+	número de maneras Mujeres no están juntas
120	=	48	+	x

Resolviendo: $x = 72$

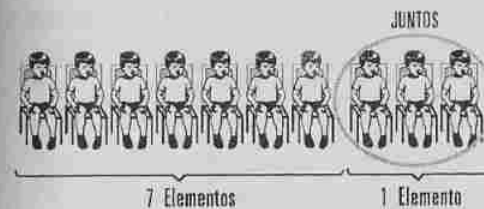
Esta forma de resolver es llamado método indirecto o del complemento.

Rpta. E

RESOLUCIÓN 26

Cada niño forma un elemento a ordenar, pero por condición del problema, 3 niños deben estar juntos, entonces a estos 3 niños los señalamos como 1 solo elemento.

Se tendría:

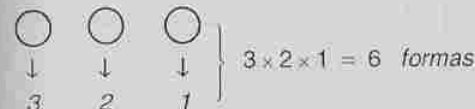


Las formas de ordenar $7 + 1 = 8$ elementos

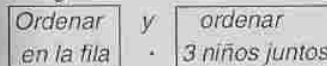
Sería:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8!$$

Pero no hay que olvidar que los niños que están juntos, también pueden ordenarse de maneras diferentes.



Luego:



$\downarrow$ $\downarrow$

8! 6

Total = $8! \times 6$

Se tendría $6 \times (8!)$ formas.

Rpta. D

RESOLUCIÓN 27

Sea el número representado literalmente: $\overline{abc}$ de cifras diferentes formado con 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

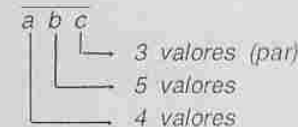
Debe ser número par, luego la cifra c debe ser par, sólo podría ser 4, 6, 8.

La cifra b pudo tomar uno de los 6 valores

indicados, pero debe ser diferente y como esto ya tiene un valor (par) sólo podría tomar alguno de los 5 valores restantes.

Similar la cifra a diferente con b y c

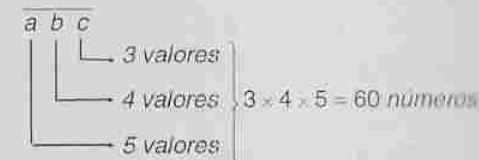
sólo puede tomar 4 valores



Se tendrá entonces:

$$3 \times 5 \times 4 = 60 \text{ número posibles}$$

Observación: No varía el resultado si consideramos los valores de a antes que b

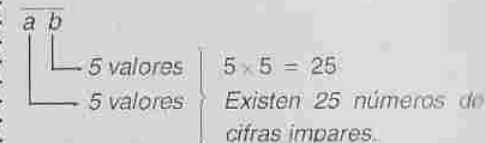


En cualquiera de los casos, primero se cuenta los valores de c, sobre el cual hay una condición (sea par)

Rpta. E

RESOLUCIÓN 28

Si los números son mayores a 13 y menores a 100, entonces tienen dos cifras, se puede representar como $\overline{ab}$ donde a y b son cifras impares 1, 3, 5, 7 y 9



Pero, los números son mayores a 13, entonces no puede ser 11, ni 13.

$$25 \text{ números} - 2 \text{ números} = 23 \text{ números}$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 29

Sean los sitios indicados:



Los sitios pares no pueden estar ocupados por los hombres, entonces sólo pueden estar las mujeres, que son 3.

La cantidad de formas que pueden ocupar los sitios pares por las mujeres está dado por:

$$3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ formas}$$

Los otros 4 sitios serán ocupados por los hombres, la cantidad de formas será:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ formas}$$

Finalmente:

ocupa sitio par	ocupa sitio impar
6	24

Total = $6 \times 24 = 144 \text{ formas}$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 30

Sean las chicas A y B que no deben quedar juntas, de las 5 que se van a ubicar.

Realicemos el cálculo en forma indirecta.

i. Total de formas que se pueden ubicar las 5 chicas:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120 \text{ formas}$$

ii. Si lo que el problema busca es que 2 chicas no estén juntas, señalemos lo contrario, esto es cuando están juntas.

Las chicas A y B serían un solo elemento, luego con 4 elementos habría:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ formas}$$

No olvidar que las chicas pueden ubicarse como AB ó BA, es decir de 2 formas diferentes

$$\text{Cantidad de formas en que A, B están juntos} = 24 \times 2 = 48$$

Finalmente:

Total de formas de ubicar 5 chicas	número de formas que 2 chicas están juntas	número de formas que 2 chicas no están juntas
120	48	x

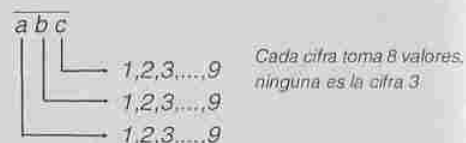
$$\text{Resolviendo: } x = 72$$

Rpta. E

RESOLUCIÓN 31

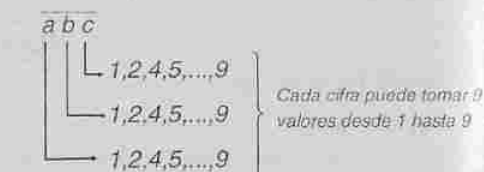
Utilicemos el método indirecto

i. Calculamos todos los números de 3 cifras significativas.



$$\text{Cantidad de Números} = 9 \times 9 \times 9 = 729$$

ii. Se desea hallar aquellos que tienen en su escritura alguna cifra 3, luego, lo contrario serán los números de tres cifras que no utilizan cifra 3.



$$\text{Cantidad de números que no utilizan cifra 3} = 8 \times 8 \times 8 = 512$$

Luego:

total de números de 3 cifras significativas	=	número que no utilizan cifra 3	+	números que utilizan alguna cifra 3
729	=	512	+	x

$$\text{Resolviendo: } x = 217$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 32

Sea el número expresado literalmente:

$$\overline{abcde} \text{ donde } a \times b \times c \times d \times e = \text{Número impar}$$

para que se cumpla la condición, cada una de las cifras debe de ser valor impar.

Nótese que si sólo una fuese par, el producto con las demás también sería par.

$\Rightarrow a, b, c, d, e$ son impares es decir pueden ser: 1, 3, 5, 7, 9 únicamente

La cantidad de números que se pueden obtener, sería:

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$(a) (b) (c) (d) (e)$$

Rpta. C

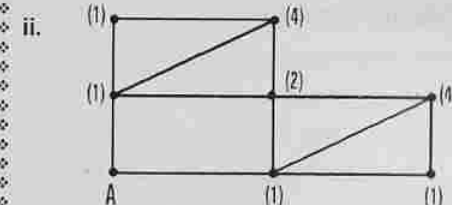
RESOLUCIÓN 33

Veamos el problema por partes, colocando entre paréntesis, la cantidad de formas para llegar a un punto.

i.

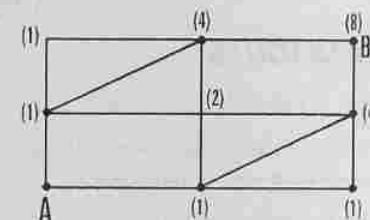


Señalamos que para llegar al vértice superior de la derecha se puede llegar por 2 caminos.



Los vértices que se indican con (4) es porque de los 3 caminos (líneas) con que se puede llegar, uno de ellos se llega de (2) formas.

iii.



Finalmente, para llegar a B, hay 2 caminos, pero en cada uno se utiliza 4 formas para llegar.

Para llegar de A a B, hay 8 formas.

Rpta. B

RESOLUCIÓN 34

Sean las disciplinas A, B y C, donde participan en dos categorías para hombres y mujeres.

i. Categoría hombres

Son 10 hombres los que entrenan en el club deportivo y pueden participar en las disciplinas A, B y C, luego:

A $\rightarrow$ Puede participar cualquiera de los 10

B $\rightarrow$ Sólo 9 (uno ya está en A)

C $\rightarrow$ Sólo 8 (uno ya está en A otro B)

Las formas serían: $10 \times 9 \times 8 = 720$

ii. **Categoría mujeres**

Similar, pero son 6 mujeres

A → Puede ser 6

B → Sólo 5 (una en A)

C → Sólo 4 (una en A, otra en B)

Las formas serían $6 \times 5 \times 4 = 120$

Finalmente, el total de formas para nombrar la delegación

$$720 \times 120 = 6! \times 5! = 6 \times (5!)^2$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 35

* Sea la representación $\overline{abc}$

donde a, b, c son diferentes entre sí y mayores a cero (significativas)

donde $a + b + c = 6$

Si: $a = 1$ $b + c = 5$

↓ ↓

$$\begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} \left\} \begin{matrix} 2 \text{ formas} \end{matrix}\right.$$

Si: $a = 2$ $b + c = 4$

↓ ↓

$$\begin{matrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix} \left\} \begin{matrix} 2 \text{ formas} \end{matrix}\right.$$

Si: $a = 3$ $b + c = 3$

↓ ↓

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \left\} \begin{matrix} 2 \text{ formas} \end{matrix}\right.$$

Si: $a = 4, 5$ ó 6 las cifras resultan ser iguales o no significativas

Total de formas: $2 + 2 + 2 = 6$

** En este caso particular, las únicas cifras que suman 6 son 1, 2, 3, siendo éstas diferentes entre sí y significativas. Los números que se forman con las cifras 1, 2 y 3 son:

$$\left. \begin{matrix} 123, 231, 321 \\ 132, 213, 312 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 6 \text{ números} \end{matrix}$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 36

Sea el número $\overline{abc}$, a y $c \neq 0$.

donde:

$$CA(\overline{abc}) = (9-a)(9-b)(10-c)$$

Según el método práctico para hallar el complemento aritmético

Este C.A. es de 3 cifras significativas $\left\{ \begin{matrix} a \neq 9 \\ b \neq 9 \\ c \neq 0 \end{matrix} \right.$

Además

$$(9-a) + (9-b) + (10-c) = a + b + c$$

Suma de cifras del C.A.

Luego:

$$28 - (a + b + c) = a + b + c \Rightarrow a + b + c = 14$$

La cifra a puede ser de 1 hasta 8

$a = 1$: $b = 8, 7, 6, 5, 6$ $\left\} \begin{matrix} 5 \text{ formas} \end{matrix}\right.$
 $c = 5, 6, 7, 8, 9$

$a = 2$: $b = 8, \dots, 4, 3$ $\left\} \begin{matrix} 6 \text{ formas} \end{matrix}\right.$
 $c = 4, \dots, 8, 9$

$a = 3$: $b = 8, \dots, 3, 2$ $\left\} \begin{matrix} 7 \text{ formas} \end{matrix}\right.$
 $c = 3, \dots, 8, 9$

$a = 4$: $b = 8, \dots, 2, 1$ $\left\} \begin{matrix} 8 \text{ formas} \end{matrix}\right.$
 $c = 2, \dots, 8, 9$

$a = 5$: $b = 8, \dots, 1, 0$ $\left\} \begin{matrix} 9 \text{ formas} \end{matrix}\right.$
 $c = 1, \dots, 8, 9$

$a = 6$: $b = 7, \dots, 1, 0$ $\left\} \begin{matrix} 8 \text{ formas} \end{matrix}\right.$
 $c = 1, \dots, 7, 8$ (b puede ser 0)

$a = 7$: $b = 6, \dots, 1, 0$ $\left\} \begin{matrix} 7 \text{ formas} \end{matrix}\right.$
 $c = 1, \dots, 6, 7$

$a = 8$: $b = 5, \dots, 1, 0$ $\left\} \begin{matrix} 6 \text{ formas} \end{matrix}\right.$
 $c = 1, \dots, 5, 6$

En forma práctica no es necesario escribir todas las formas

$$\therefore \text{Total} = 9 + 5 + 2(6 + 7 + 8) = 56$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 37

Consideremos al grupo formado por las mujeres y el niño como un elemento, con los 2 hombres, se tendría 3 elementos para ordenar.

$$\text{Número de formas} = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Este grupo tiene al niño al centro, pero las mujeres pueden cambiar su ubicación de 2 formas.

Luego:

(ordenar los 3 elementos) y (ubicación de 2 mujeres)
 $\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$
 $6 \qquad \qquad \qquad 2$

$$\therefore \text{Total de formas} = 6 \times 2 = 12 \text{ formas}$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 38

De los 6 libros, 4 no son de Álgebra y deben estar juntos, luego es considerado como un elemento, junto a los 2 de Álgebra, habría que ordenar 3 elementos.

$$\text{Número de formas} = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Pero a su vez, los 4 libros que están juntos, pueden ordenarse de diferentes formas:

$$\begin{matrix} \text{Formas de ordenar} \\ 4 \text{ libros} \end{matrix} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Luego:

(ordenar los 3 elementos) y (ordenar 4 libros)

↓

6

↓

24

$$\therefore \text{Total de formas} = 6 \times 24 = 144$$

Rpta. E

RESOLUCIÓN 39

Sea el número $\overline{abc}$

donde: $a + b + c = 9$

Como este valor es pequeño, se puede señalar las ternas que sumen 9, con cifras significativas y diferentes:

$$a + b + c = 9 \left\{ \begin{matrix} 1, 2, 6 \\ 1, 3, 5 \\ 2, 3, 4 \end{matrix} \right.$$

Cada terna a su vez puede formar:

$$3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ números diferentes}$$

(Por ejemplo: 126, 162, 216, 612, 621, 261)

Finalmente:

$$\text{Total} = 3 \times 6 = 18 \text{ números}$$

Cantidad de ternas $\quad$ formas que toma cada una

Rpta. D

RESOLUCIÓN 40

El número indicado es: $\overline{ba(a+b)_7}$

Luego: $a, b < 7$ y $b \neq 0$

$b = 1$: $\overline{1a(a+1)_7}$

donde: $a = 0, 1, 2, \dots, 5 \Rightarrow 6$ valores

$b = 2$: $\overline{2a(a+2)_7}$

donde: $a = 0, 1, 2, \dots, 4 \Rightarrow 5$ valores

Se puede continuar hasta el último valor de b

$b = 6$: $\overline{6a(a+6)_7}$

Sólo $a = 0 \Rightarrow 1$ valor

$\therefore$ Total de formas = $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$

Rpta. E

RESOLUCIÓN 41

Como a la derecha e izquierda debe de haber un hermano, Carlos no puede sentarse a un extremo de la fila, de los 5 asientos sólo puede ubicarse en el segundo, tercero o cuarto asiento.



Carlos sentado en el 2º asiento $\rightarrow 1$ forma

María puede sentarse en el 4º ó 5º $\rightarrow 2$ formas

Los hermanos se sientan en los asientos que quedan $\rightarrow 3 \times 2 \times 1 = 6$ formas

En este primer caso:

Número de formas = $1 \times 2 \times 6 = 12$ formas



Similar al anterior

Carlos en el 3º asiento $\rightarrow 1$ forma

María en el 1º ó 6º $\rightarrow 2$ formas

Los hermanos ($3 \times 2 \times 1$) $\rightarrow 6$ formas

Número de formas = $1 \times 2 \times 6 = 12$ formas



Finalmente Carlos en el 4º asiento

Se tendrá:

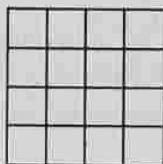
Número de formas = $1 \times 2 \times 6 = 12$ formas

$\therefore$ Total = $12 + 12 + 12 = 36$

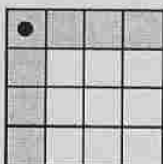
Rpta. E

RESOLUCIÓN 42

El tablero será como se indica:



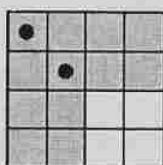
La primera moneda podrá ser colocada en cualquiera de los 16 casilleros. Para facilitar tomemos un casillero de la esquina.



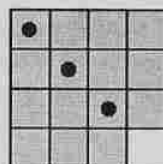
Al colocar una moneda en un casillero, esa fila y esa columna no pueden contener otra moneda.

Habrán 7 casilleros que no pueden ser utilizados (están sombreados).

De los 16 casilleros posibles para la primera moneda, sólo quedarán $16 - 7 = 9$ casilleros para la segunda.



Al colocar la segunda moneda en uno de los 9 casilleros posibles, habrá 5 casilleros que no podrán ser utilizados para las monedas restantes, la tercera moneda dispone de 4 casilleros.



Con la tercera moneda se eliminan 3 de los 4 casilleros disponibles, sólo queda 1 luego la cuarta moneda deberá de ocupar dicho casillero.

Total de formas

$(16) \times (9) \times (4) \times (1) = 576$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 43

Según el enunciado: $N = \overline{ab}$ ($a \neq b$)

Donde: $a + b = \overline{mn}$ m, n diferentes y significativas

Sólo: $\overline{mn} = 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$

Veamos:

$\overline{mn} = 18 = a + b$ Sólo si $a = b = 9$ (No)

$\overline{mn} = 17 \Rightarrow \overline{ab} = 89, 98$

$\overline{mn} = 16 \Rightarrow \overline{ab} = 79, 97$ (88 No)

$\overline{mn} = 15 \Rightarrow \overline{ab} = 69, 78, 87, 96$

$\overline{mn} = 14 \Rightarrow \overline{ab} = 59, 68, 86, 95$ (77 No)

No es necesario señalar cada caso, debe de observar como aumentan los valores y poder establecer los siguientes.

Así, se tiene 2, 2, 4 y 4 valores.

Comprobemos los siguientes:

$\overline{mn} = 13 \Rightarrow \overline{ab} = 49, 58, 67, 76, 85, 94$

$\overline{mn} = 12 \Rightarrow \overline{ab} = 39, 48, 57, 75, 84, 93$
6 valores

Total de números:

$2 + 2 + 4 + 4 + 6 + 6 = 24$

Rpta. E

RESOLUCIÓN 44

El valor de P se puede escribir como:

$P = \overline{ab}^{\overline{bc}}$

donde a y b son significativas (primera cifra de un numeral) y diferentes entre sí:

$\overline{ab}$ tomará $9 \times 8 = 72$ valores

(existen 9 cifras significativas, pero si una de las cifras puede escoger 9 valores, la otra cifra por ser diferente sólo toma 8 valores).

$\overline{ab}^{\overline{bc}}$ Cada uno de los 72 valores será elevado al exponente $\overline{bc}$, pero al tomar esos valores se está considerando un valor fijo para b , luego el exponente dependerá de c , éste puede tomar 10 valores.

Total de valores = $72 \times 10 = 720$ números
Claro está que $720 = 6!$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 45

Señalemos que $2a = n$, luego $a = \frac{n}{2}$

La expresión es de la forma:

$(\frac{n}{2})(\frac{n}{b})6b$, se observa que n es par diferente de 0.

También b divide exactamente a n y es una cifra.

$n = 2 \Rightarrow b = 1, 2$ (2 valores)

$n = 4 \Rightarrow b = 1, 2, 4$ (3 valores)

$n = 6 \Rightarrow b = 1, 2, 3, 6$ (4 valores)

$n = 8 \Rightarrow b = 1, 2, 4, 8$ (4 valores)

$n = 10 \Rightarrow b = \cancel{1}, 2, 5$ (2 valores)

$n = 12 \Rightarrow b = \cancel{1}, 2, 3, 4, 6$ (4 valores)

$n = 14 \Rightarrow b = \cancel{1}, 2, 7$ (2 valores)

$n = 16 \Rightarrow b = \cancel{1}, 2, 4, 8$ (3 valores)

$n = 18 \Rightarrow b = \cancel{1}, 2, 3, 6, 9$ (4 valores)

No porque $\frac{n}{b} < 10$

Total de números = $2+3+4+4+2+4+2+3+4 = 28$

Nota:

La cantidad de divisores de un número no es una cantidad que varíe creciente o decreciente, sino en forma alternada.

Rpta. D**RESOLUCIÓN 46**

Veamos en 2 partes:

- i. Si el número es mayor a 4000 al sumarle sus cifras seguirá siendo mayor a 4000.

Sea $\overline{abcd} > 4000$ ($a, b, c, d \neq 0$)

$\left. \begin{array}{l} \rightarrow 9 \text{ valores posibles } (1, 2, \dots, 9) \\ \rightarrow 9 \text{ valores posibles} \\ \rightarrow 9 \text{ valores posibles} \\ \rightarrow \text{pueden ser } 4, 5, 6, 7, 8, 9 \\ \quad (6 \text{ valores posibles}) \end{array} \right\}$

Total $9 \times 9 \times 9 \times 6 = 4374$ números

- ii. Si el número es menor a 4000

Se cumple $\overline{abcd} + a + b + c + d > 4000$ (I)

Suma máxima = 36

De donde:

$$\overline{abcd}_{\text{mínimo}} > 3964 \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 9 \end{array} \right.$$

Reemplazando en (I):

$$39\overline{cd} + 3 + 9 + c + d > 4000$$

$$\overline{cd} + c + d > 88$$

Si $d = 6$, se obtiene $c > 11$

$\Rightarrow$ no cumple

Si $d = 7$, se obtiene $c > 5,5$

$$\Rightarrow c = 6, 7, 8, 9$$

Luego el menor valor sería 3976 y los números buscados podrían ser hasta 3999, hay 24 números pero 3980 y 3990 usan cifra no significativa.

Sólo habrá 22 números

De (i) y (ii):

$$4374 + 22 = 4396 \text{ números}$$

Rpta. C**RESOLUCIÓN 47**

Del número $(a+3)(b-2)ba_k$

En base k la mayor cifra es $k-1$

1. Valores de a : $0, 1, 2, \dots, (k-4)$

La cifra a puede ser 0 porque la primera cifra es $a+3$ (no a) y al reemplazar $a = 0$, se obtiene 3 como primera cifra.

Además la mayor cifra $k-1$ se obtendrá primero cuando a sea $k-4$

De 0 a $(k-4)$ hay $(k-3)$ valores

2. Valores de b : $2, 3, 4, \dots, (k-1)$

La cifra b no puede ser menor a 2 porque la segunda cifra del numeral sería negativo.

De 2 a $(k-1)$ hay $(k-2)$ valores

Cantidad de números = (Valores de a) $\times$ (Valores de b)

$$72 = \frac{(k-3)(k-2)}{8 \quad 9}$$

$$\therefore \text{Resolviendo } k = 11$$

Rpta. D**RESOLUCIÓN 48**

Nótese que a y b son cifras significativas por ser ambas primera cifra.

El numeral $\overline{abc}$ tomará los valores según:

$$a \Rightarrow 1, 2, 3, \dots, 9 \quad (9 \text{ valores})$$

$$b \Rightarrow 1, 2, 3, \dots, 9 \quad (9 \text{ valores})$$

$$c \Rightarrow 0, 1, 2, \dots, 9 \quad (10 \text{ valores})$$

$$\text{Total} = 9 \times 9 \times 10 = 810 \text{ números}$$

Ahora $\overline{abc}$ mantendrá los valores señalados, porque ya se han contado b y a

$\Rightarrow$ Se tienen 810 números

Nota:

Véase la diferencia de:

a^b con a^a (a, b cifras).

En el primero cada uno de los 9 posibles valores de a es afectado por cada uno de los 9 posibles valores de b , habrá 81 posibles resultados.

En el segundo, cada valor de a es elevado al mismo valor; sólo habría 9 posibilidades.

Rpta. B**RESOLUCIÓN 49**

Utilizando la forma indirecta de resolver

Total de números de 4 cifras

$\overline{abcd}$
 $\left. \begin{array}{l} \rightarrow 10 \text{ valores} \\ \rightarrow 10 \text{ valores} \\ \rightarrow 10 \text{ valores} \\ \rightarrow 9 \text{ valores} \end{array} \right\} \text{Total} = 10 \times 10 \times 10 \times 9 = 9000 \text{ números}$

Ahora encontremos aquellos que no poseen cifra significativa, esto es no utiliza 0 en su escritura.

$\overline{abcd}$
 $\left. \begin{array}{l} \rightarrow 9 \text{ valores} \\ \rightarrow 9 \text{ valores} \\ \rightarrow 9 \text{ valores} \\ \rightarrow 9 \text{ valores} \end{array} \right\} \text{Total} = 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561$

Finalmente:

$$\begin{array}{rcl} \text{total de} & \text{números de} & \text{números de} \\ \text{números de} & 4 \text{ cifras} & 4 \text{ cifras} \\ 4 \text{ cifras} & \text{que no} & \text{que utilizan} \\ & \text{usan 0} & \text{alguna cifra 0} \\ 9000 & = & 6561 + x \end{array}$$

$$\text{Resolviendo: } x = 2439$$

Rpta. C**RESOLUCIÓN 50**

Para que el producto $a \times 3 \times b \times c$. Sea impar, cada uno de los factores debe de ser impar.

Luego a, b, c podrán ser:

$$1, 3, 5, 7, 9 \quad (5 \text{ valores})$$

$$\therefore \text{Total} = 5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ números}$$

Rpta. A**RESOLUCIÓN 51**

Sean los números $\overline{abcde}$ veamos dos casos que se presentan:

1. La última cifra es significativa par

e podría ser 2, 4, 6 u 8, 4 valores.
 a, b, c, d son impares diferentes:
1, 3, 5, 7 ó 9.

Total de permutaciones:

$$P_4^5 = \frac{5!}{1!} = 120$$

Luego habrían $4 \times 120 = 480$ números

2. La última cifra es significativa impar

a, b, c, d, e son impares diferentes 1, 3, 5, 7, 9

Total de Permutaciones:

$$P_5^5 = \frac{5!}{0!} = 120$$

hay 120 números

Finalmente:

$$480 + 120 = 600 \text{ números}$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 52

Si el producto no es impar, sólo podrá ser par, para tal efecto uno de los factores por lo menos debe ser par.

$\overline{abcde}$ tiene por lo menos una cifra par.

Calculemos en forma indirecta

1. Total de números

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 90000$$

2. Números que no tienen cifra par

Sólo utilizan cifra impar:

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$$

Luego:

$$\text{total de números} = \text{números que no utilizan cifra par} + \text{números que utilizan alguna cifra par}$$

$$90000 = 3125 + x$$

Resolviendo:

$$x = 86875$$

Rpta. A

RESOLUCIÓN 53

El número de 3 cifras será de la forma:

$$\overline{aba}, \overline{aab}, \overline{baa}$$

para que se repita 2 veces solamente: $a \neq b$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{aba} \\ \overline{aab} \\ \overline{baa} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \rightarrow 9 \text{ valores} \\ b \rightarrow 9 \text{ valores} \end{array} \Rightarrow \text{Existen } 9 \times 9 = 81 \text{ números}$$

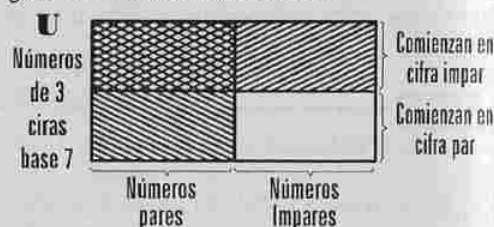
Nótese que la primera cifra es diferente de cero, luego sólo puede tomar 9 valores, la otra cifra podría tomar 10 valores pero como debe ser diferente a la primera, sólo le queda 9 valores.

$$\text{Finalmente: } 3 \times 81 = 243$$

Rpta. A

RESOLUCIÓN 54

Según las características señalamos en un diagrama los números buscados.



De los números de 3 cifras de base 7

Eliminamos los números pares

→ quedan los números impares

eliminamos los que comienzan en cifra impar

→ quedan los que comienzan en cifra par

hay que buscar, números de 3 cifras en base 7, que sean impares y empiezan en cifra par.

¡Ojo! Si un número es impar:

Base Par: La última cifra es impar

Base Impar: La suma de todas las cifras es impar.

En base 7 debe cumplirse lo último, suma de cifras es impar.

Luego:

$\overline{abc}_7$ como a es par $\Rightarrow b + c = \text{impar}$

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ es par} \rightarrow 2, 4, 6 \\ 1. b \text{ es impar} \rightarrow 1, 3, 5 \\ c \text{ es par} \rightarrow 0, 2, 4, 6 \end{array} \right\} 3 \times 3 \times 4 = 36 \text{ números}$$

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ es par} \rightarrow 2, 4, 6 \\ 2. b \text{ es par} \rightarrow 0, 2, 4, 6 \\ c \text{ es impar} \rightarrow 1, 3, 5 \end{array} \right\} 3 \times 4 \times 3 = 36 \text{ números}$$

$$\therefore \text{Total } 36 + 36 = 72 \text{ números}$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 55

Los números son:

$$300 \ 301 \ 302 \ 303 \dots 398 \ 399$$

es, decir es de la forma $\overline{3ab}$ en total 100 números, 300 cifras

* Como la primera cifra es 3, no es considerada, se restan 100 cifras

* La cifra a será 3 en $330 \ 331 \dots 339$ toma la forma $\overline{33b}$, son 10 cifras a restar

* La cifra b será 3 en $303 \ 313 \dots 393$ toma la forma $\overline{3a3}$, son 10 cifras a restar

Luego quedan:

$$300 - 100 - 10 - 10 = 180 \text{ cifras}$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 56

Son 9 bolas numeradas de 1 al 9.

Luego 2 bolas no poseen el mismo valor

Hay que obtener 3 bolas, cuyos valores sean diferentes y que sumen 9

Los valores que cumplen lo anterior son:

$$126, 135 \text{ ó } 234$$

Para ordenar, se tendría en cada caso:

$$P_3 = 3! = 6 \text{ formas}$$

Como son 3 casos: total = $3 \times 6 = 18$ formas

Rpta. B

RESOLUCIÓN 57

Un número de 8 cifras formado como:

7 cifras iguales a 6

1 cifra diferente a 6 ($0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8$)

8 valores

El número de ordenaciones posibles será:

$$P_{7,1}^8 = \frac{8!}{7!1!} = 8 \text{ formas}$$

(con repetición)

Pero en cada uno, la cifra diferente podrá tomar 8 valores.

Entonces habría $8 \times 8 = 64$ números

¡Cuidado! se está incluyendo cuando la primera cifra diferente también es 0, luego hay que eliminar un valor

$$64 - 1 = 63 \text{ números}$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 58

1. Sea el número $\overline{a(a+1)b_n}$

Donde:

$$a = 1, 2, 3, \dots, (n-2) \Rightarrow (n-2) \text{ valores}$$

$$b = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \Rightarrow n \text{ valores}$$

Habrán $(n-2) \cdot n$ números de esa forma.

2. Pero también hay que considerar:

$$\overline{a(a-1)b_n}$$

Donde:

$$a = 1, 2, 3, \dots, (n-1) \Rightarrow (n-1) \text{ valores}$$

$$b = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \Rightarrow n \text{ valores}$$

Habrán $(n-1) \cdot n$ números

$$\text{Total} = \underbrace{(n-2) \cdot n}_{\text{de (1)}} + \underbrace{(n-1) \cdot n}_{\text{de (2)}} = 77$$

$$(2n-3) \cdot n = 11 \cdot 7$$

$$\text{Resolviendo: } n = 7$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 59

Si 3 están juntos, formarían 1 elemento

Se tendría $P_{m-2} = (m-2)!$

Pero a, b y c pueden ordenarse de

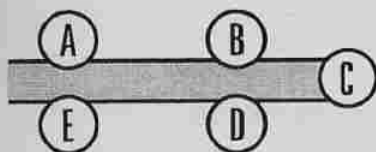
$$P_3 = 3! = 6 \text{ formas}$$

Luego habría $(m-2)! \times 6$ permutaciones

Rpta. E

RESOLUCIÓN 60

Sean las habitaciones:



C → 3 formas de ser ocupado
(2 no desean)

A → 4 formas (ya uno quedó en C)

B → 3 formas (uno en C otro en A)

C → 2 formas (3 ya eligieron)

D → 1 forma

Luego se tendrá:

Número de maneras diferentes de elegir habitación = $3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 72$

Rpta. A

RESOLUCIÓN 61

En realidad, sólo 9 atletas podrían llegar en los 3 primeros lugares, el otro siempre llega cuarto. La cantidad de formas estará dado por:

$$P_3^9 = \frac{9!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

Rpta. E

RESOLUCIÓN 62

Las niñas y el asiento vacío pueden ser considerados como un solo elemento.

Se tendría entonces 3 elementos a colocar alrededor de un centro:

$$P_C(3) = 2! = 2 \text{ formas}$$

Pero a su vez las niñas pueden ubicarse de dos maneras distintas: Una a la derecha del asiento vacío y la otra a la izquierda mientras que la otra manera sería lo contrario.

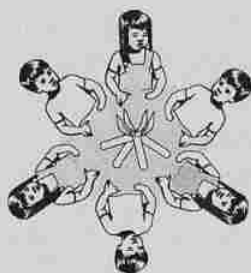
Luego:

número de maneras de ubicar a los niños = $2 \times 2 = 4$ formas

Rpta. C

RESOLUCIÓN 63

Para que entre dos chicas se encuentre un muchacho, chicas y muchachos deben de ubicarse en forma alternada, esto se puede señalar:



La posición de los muchachos y chicas están determinadas

1. número de formas que las chicas pueden sentarse = $P_C(3) = 2! = 2$

2. número de formas que los muchachos pueden sentarse = $P(3) = 3! = 6$

Cada forma en que se pueden ubicar las chicas, varía con cada forma en que se ubiquen los muchachos.

En total = $2 \times 6 = 12$ formas posibles

↓ ↓
(m) (ch)

Rpta. C

RESOLUCIÓN 64

La cifra central podrá ser 4, 6, 8 esto es, 3 valores (pares)

Pero las restantes cifras (quedan 6) deben de ubicarse alrededor del casillero central, la cantidad de formas será:

$$P_C(6) = 5! = 120$$

Luego:

Total de maneras de ubicar las cifras = $3 \times 120 = 360$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 65

Se presentan 2 casos:

1. n vasos $\begin{cases} 6 \text{ con limonada} \\ \text{resto con chicha } (n-6) \end{cases}$

La cantidad de formas de servir será las permutaciones de n elementos con repetición

$$P_{6, (n-6)}^n = \frac{n!}{6! (n-6)!} = 28$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)!}{(n-6)!} = 28 \times 6!$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 28 \times 6! = 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$$

Identificando $n = 8$

2. Se considera 1 vaso más $(8+1)$

9 vasos $\begin{cases} 6 \text{ con limonada} \\ 1 \text{ con gaseosa} \\ 2 \text{ con chicha} \end{cases}$

La cantidad de formas será:

$$P_{6, 1, 2}^9 = \frac{9!}{6! \times 1! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{2} = 252$$

∴ Habrá 252 formas de realizar el servicio.

Rpta. C

RESOLUCIÓN 66

La cantidad de formas que se puede ordenar será:

$$P_{3, 4, 3}^{10} = \frac{10!}{3! 4! 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! 4! 3!}$$

$$P_{3, 4, 3}^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 3} = 4200$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 67

Como las bolas rojas se ubican en los extremos:



Las diferentes ordenaciones dependerán de como se ordenan las demás bolas esto será:

$$P_{4, 3}^7 = \frac{7!}{4! 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$$

Se tendrá 35 formas diferentes

Rpta. E

RESOLUCIÓN 68

Habrà que escoger las posibles parejas de jugadores, haciendo 5 participantes. No interesa el orden, luego se trata de combinaciones

$$C_2^5 = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 69

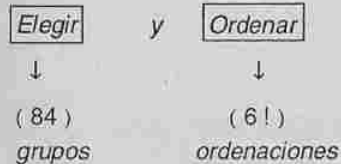
Primero habrá que "escoger" 6 objetos de los 9 posibles, se tendrá que conocer el número de combinaciones:

$$C_6^9 = \frac{9!}{3! 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 84$$

Después de escoger los 6 objetos, habrá que ordenarlos, en este caso se encontrará las permutaciones posibles con 6 objetos

$$P_6 = 6!$$

Luego:



Cada grupo se ordena de 6! formas

$$\text{Total} = 84 \times 6! = \underline{12 \times 7 \times 6!} = 12 \times 7!$$

Se da la forma

Rpta. E

RESOLUCIÓN 70

Hay que elegir una corbata de cada tipo.

1. Elige una corbata americana $C_1^3 = 3$

2. Elige una corbata inglesa $C_1^4 = 4$

3. Elige una corbata nacional $C_1^5 = 5$

Total de formas:

$$3 \times 4 \times 5 = 60 = \frac{120}{2} = \frac{5!}{2}$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 71

Del la palabra EUCALIPTO:

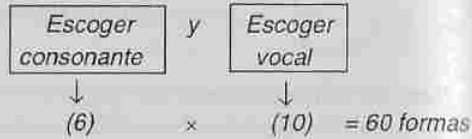
Vocales: EUAIO (5 letras)

Consonantes: CLPT (4 letras)

Se escoge 2 consonantes $C_2^4 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$

Se escoge 3 vocales: $C_3^5 = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$

Para escoger las 5 letras



Ahora, ordenar las 5 letras $P_5 = 5!$

Total de palabras = $60 \times (5!) = 10 \times 6 \times 5! = 10 \times (6!)$ formadas

Rpta. C

RESOLUCIÓN 72

Al escoger los sabores, se puede pedir los tres del mismo sabor, dos del mismo sabor o los tres de diferente sabor.

1. Los tres del mismo sabor

Habrà que elegir un sabor de 4 posibles

$$C_1^4 = 4$$

Se puede pedir de 4 formas, los tres del mismo sabor

2. Dos del mismo sabor y el tercero diferente

Hay 2 sabores que se piden, se tendrá

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$$

Pero hay que observar que si se tiene dos sabores A y B se puede pedir de las formas siguientes:

1. forma (A) (A) (B) } 2 formas posibles
2. forma (A) (B) (B) } para pedir 2 sabores

Se tendrá un total de $6 \times 2 = 12$ formas

3. Los tres de diferente sabor

Habrà que escoger 3 sabores de 4

$$C_3^4 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

Finalmente, las formas de pedir son:

$$4 + 12 + 4 = 20 \text{ formas}$$

(1) (2) (3)

Rpta. E

RESOLUCIÓN 73

Fichas azules (A) (1) (2) ... (10)

fichas blancas (B) (1) (2) ... (10)

fichas celestes (C) (1) (2) ... (10)

Se debe escoger 3 fichas de modo que:



En este grupo, sólo aparecen 2 colores.

Luego habría que escogerlos de los 3 posibles: A, B, C se tendría $C_2^3 = 3$ formas.

Al escoger azul y blanco por ejemplo, se tendría: AAB ó BBA.

Es decir se presentan 2 casos, lo misma será para las demás combinaciones

se tendrá en total $2 \times 3 = 6$ formas posibles

Pero además, las fichas se diferencian en el número que poseen, entonces:

* Para elegir 2 fichas de 10 se tendrá:

$$C_2^{10} = \frac{10 \times 9}{2} = 45 \text{ formas}$$

* Para elegir 1 ficha de 10

se tendrá: $C_1^{10} = 10$ formas

Total de formas de elegir 2 fichas de un color y una ficha de otro, será:

$$6 \times (45 + 10) = 2700$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 74

Veamos por separado las dos operaciones

1. Lanzar 3 monedas

Se desea obtener 2 ó 3 caras

* Si son 2 caras sería: CCS, CSC, SCC esto esta dado como:

$$P_2^3 = \frac{3!}{2!1!} = 3 \text{ formas}$$

* Si son 3 caras: CCC una forma única.

Luego es posible obtener 2 ó más caras de $3 + 1 = 4$ formas diferentes.

2. Lanzar dos dados

Deben de sumar 10 ó más de 10

Sean a y b los resultados obtenidos de lanzar 2 dados ($a, b \leq 6$)

* Suman 10: $a + b = 10$

$$\left. \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 5 & 5 \\ 6 & 4 \end{array} \right\} 3 \text{ formas posibles}$$

* Suman 11: $a + b = 11$

$$\left. \begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{array} \right\} 2 \text{ formas posibles}$$

* Suman 12: $a + b = 12$

$$6 \quad 6 \quad \} 1 \text{ sola forma}$$

Se obtiene en total:

$$3 + 2 + 1 = 6 \text{ formas}$$

Juntando las 2 operaciones

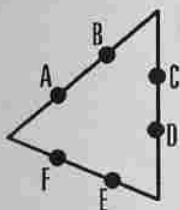


$$4 \times 6 = 24 \text{ formas}$$

Rpta. E

RESOLUCIÓN 75

Para un triángulo cualquiera :



Se obtendrá 6 puntos: A, B, C, D, E y F que serán los vértices de otros triángulos.

Nótese que para obtener un triángulo, hay que formar los diferentes grupos de tres puntos no colineales, esto es, los tres puntos no están en una misma recta.

Los puntos señalados cumplen con esa característica, por ejemplo ABC, DEF, etc.

El número de triángulos estará dado por el número de combinaciones que se puede formar con 6 objetos (puntos) agrupados de 3 en 3:

$$C_3^6 = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20$$

Se podrán formar 20 triángulos

Rpta. E

RESOLUCIÓN 76

De las 9 personas, sólo 5 podrán sentarse, hay que elegir esas 5 personas de las 9 posibles. Esto estará dado por:

$$C_5^9 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 126$$

De éstos grupos de 5 personas, hay que ordenarlas alrededor de una mesa redonda, esto será:

$$P_C(5) = 4! = 24 \text{ formas}$$

Existen 24 formas para ordenar cada grupo de 5, como existen 126 grupos, se tendrá un total de:

$$24 \times 126 = 3024 \text{ formas}$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 77

Se debe escoger 3 sumandos de 5 posibles:

$$C_3^5 = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10 \text{ formas}$$

Sin embargo, hay que verificar que no existan 2 sumas iguales, para ello bastará ver si dos pares de números suman una misma cantidad. En este caso se aprecia rápidamente que no es así.

Rpta. A

RESOLUCIÓN 78

Sean las dos amigas que no asisten juntas A y B. Se presentan los siguientes casos:

1. Asiste A y no asiste B

Faltaría invitar a 4 personas que deben de ser elegidas de 6 posibles (eran 8 pero A asiste y la otra no)

$$\text{Se tendrá } C_4^6 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 15 \text{ formas}$$

2. Asiste B y no asiste A

Similar al anterior, luego habrá 15 formas posibles de invitar.

3. No asiste A ni B

Habrà que escoger a las 5 chicas de las otras 6 que han quedado esto es:

$$C_5^6 = 6 \text{ formas}$$

Finalmente de (1), (2) y (3)

$$\text{Total de maneras de invitar a 5} = 15 + 15 + 6 = 36$$

Rpta. E

RESOLUCIÓN 79

Veamos lo siguientes:

1. Si sólo regala un artículo, puede escogerlo de cualquiera de los 5 posibles:

$$C_1^5 = 5$$

2. Si regala 2 artículos, tendrá:

$$C_2^5 = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$$

nótese que el precio de lo más caros (51, 73) no excede a lo que tiene

3. Si regala 3 artículos, tendrá:

$$C_3^5 = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$$

Pero aquí el precio total, de dos grupos si excede a 150, entonces no se consideran.

$$47 + 51 + 73 = 171$$

$$32 + 51 + 73 = 156$$

$$\text{Sólo habrá } 10 - 2 = 8$$

4. Si regala 4 objetos, el costo total excede a lo que tiene; veamos los más baratos:

$$25 + 32 + 47 + 51 = 155$$

Luego no podrá regalar 4 artículos.

Finalmente de (1), (2) y (3)

$$5 + 10 + 8 = 23 \text{ formas de regalar}$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 80

Se pueden señalar los siguientes casos:

1. Esta el doctor en la comisión

Sólo se podrá escoger a los ingenieros de los cuatro restantes (no puede estar A ni B). Esto será:

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6 \text{ formas}$$

2. No está el doctor en la comisión

Se elige un doctor de los 3 restantes

$$C_1^3 = 3$$

Se elige dos ingenieros de los 6 posibles

$$C_2^6 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15$$

Al realizar ambas elecciones

$$3 \times 15 = 45 \text{ formas}$$

Luego, el total de maneras diferentes será:

$$6 + 45 = 51$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 81

Mostramos una tabla de doble entrada

donde se indique:

L: Lanzar un dado

E: Extraer una ficha de una urna

L \ E	1	2	3	4
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)

Se observa que $n(\Omega) = 24$ elementos para el evento A:

"El valor de la ficha es igual al puntaje del dado"

Se tendrá:

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$

donde: $n(A) = 4$

Rpta. A

RESOLUCIÓN 82

El espacio muestral estará dado por:

$$\Omega = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), \dots, (6, 6, 6)\}$$

cada elemento es de la forma:

$$(a, b, c) \text{ donde } a, b, c \leq 6$$

Señalado el evento A:

"La suma de los puntajes es menor a 5"

- Lo mínimo que pueden sumar es 3, y esta dado por (1, 1, 1)
- Para que sumen $4 = a + b + c$ se tienen las siguientes formas:

$$(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$$

Finalmente:

$$A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$$

$$\text{Donde: } n(A) = 4$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 83

Sean los equipos A y B que se enfrentan.

Según las características del reglamento, se campeona (termina el torneo):

- Cuando se gana dos partidos seguidos ó
 - Se gana 3 partidos (en forma alternada)
- i. Digamos que A campeone de la primera forma las posibilidades serían.

AA
BAA
ABAA
BABAA

Se cumple en cada caso que A campeona con 2 partidos consecutivos

Similar sería para B (BB, ABB, etc.)

Se tendría 8 formas (4 campeona A y 4 lo hace B)

- Si A campeona de la segunda forma:

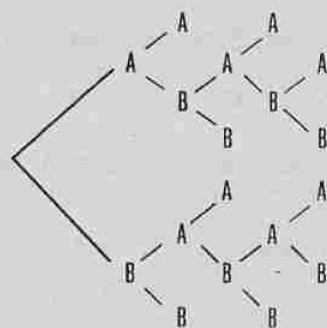
Sólo será si: ABABA

Similar a B: BABAB

Existen 2 formas

Luego se tendrá $8 + 2 = 10$ formas posibles

El diagrama de árbol respectivo será:

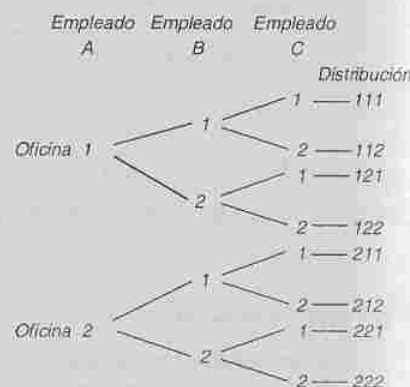


Nótese que la cantidad de puntas (terminales) del árbol es también la cantidad de formas

Rpta. C

RESOLUCIÓN 84

Señalando el espacio muestral para el experimento: "Asignar las oficinas 1 y 2 a los empleados A, B y C", utilizamos el diagrama del árbol:



Como se desea que A y C no estén juntos en la misma oficina, la numeración de las oficinas asignadas en la distribución debe ser diferente, luego, los casos que cumplen son:

$$\{112, 122, 211, 221\}$$

Finalmente:

$$P = \frac{4 \text{ (favorables)}}{8 \text{ (posibles)}} = 0,5$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 85

Dado el espacio muestral:

$$\Omega : \text{"ganan dos alumnos"}$$

El número de casos posibles en el que 2 alumnos, de los 6 participantes, ocupen los dos primeros puestos es:

$$P_2^6 = \frac{6!}{4!} = 6 \times 5 = 30 \text{ formas}$$

Sea el evento:

A: "ganan dos alumnos del colegio A"

el número de casos favorables en el cual 2 alumnos del colegio A (de los 3) ganan los dos primeros puestos es:

$$P_2^3 = \frac{3!}{1!} = 3 \times 2 = 6 \text{ formas}$$

Luego:

$$P_{[A]} = \frac{6 \text{ (favorables)}}{30 \text{ (posibles)}} = \frac{1}{5} = 0,20$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 86

Se tiene:

$$\Omega : \text{"extraer 2 nombres de 8"}$$

Luego el número de casos posibles será los diferentes grupos de 2 niños que se pueda formar:

$$C_2^8 = \frac{8 \times 7}{1 \times 2} = 28 \text{ formas}$$

y sea el evento A:

A: "extraer 2 nombres de niña"

Como sólo hay 3 niñas, el número de casos favorables será:

$$C_2^3 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3 \text{ formas}$$

Finalmente:

$$P_{[A]} = \frac{3 \text{ (favorables)}}{28 \text{ (posibles)}}$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 87

Señalamos como B, C y A los eventos de extraer una bola blanca, celeste y amarilla respectivamente. Se tendrá:

$$m = P_{[B]} = \frac{\text{formas de extraer una bola blanca}}{\text{formas de extraer una bola}}$$

$$= \frac{5}{10} = 0,5 \Rightarrow m = 0,5$$

Además:

E: "extraer una bola blanca o amarilla"

$$E = B \cup A$$

Pero sólo se puede extraer una bola blanca o una amarilla (no ambas)

Son mutuamente excluyentes, luego:

$$n = P_{[E]} = P_{[B \cup A]} = P_{[B]} + P_{[A]}$$

$$\text{Hallando: } P_{[A]} = \frac{2}{10} = 0,2$$

Reemplazando:

$$n = P_{[B \cup A]} = 0,5 + 0,2 = 0,7$$

Finalmente:

$$m + n = 0,5 + 0,7 = 1,2$$

Rpta. A

RESOLUCIÓN 88

La primera ficha puede extraerse de 10 formas diferentes, y como no se vuelve a colocar en la caja, la segunda ficha puede extraerse de las 9

formas restantes. Así ambas fichas pueden extraerse:

$$10 \times 9 = 90 \text{ formas diferentes}$$

Pero para que tengan valor 1, la primera ficha sólo puede tomar 2 maneras de sacar (ya sea azul o blanca), quedando sólo 1 forma de sacar en la segunda extracción de modo que la cantidad de formas para extraer el mismo valor 1 es:

$$2 \times 1 = 2 \text{ formas}$$

Así la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

Rpta. D**RESOLUCIÓN 89**

La cantidad de formas para ordenar 5 libros, esta dado por:

$$P_5 = 5! = 120 \text{ formas}$$

Ahora, veamos el evento A: "Los libros de historia están separados por los libros de medicina".

Las ubicaciones serán:



Para ubicar los dos libros de historia:

se tendrá: $P_2 = 2! = 2 \text{ formas}$

Para ubicar los libros de medicina:

se tendrá $P_3 = 3! = 6 \text{ formas}$

El total de formas para ordenar según lo indicado será:

$$2 \times 6 = 12 \text{ formas}$$

Finalmente:

$$P_{[A]} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10} = 0,10$$

Rpta. E**RESOLUCIÓN 90**

De los 15 relojes, se deben escoger 3, el número de formas de escoger será:

$$C_3^{15} = \frac{15 \times 14 \times 13}{1 \times 2 \times 3} = 455 \text{ formas}$$

Pero de éstas formas, encontremos aquellas en que haya 2 defectuosos:



El total de formas será:

$$C_2^6 \times C_1^9 = \left(\frac{6 \times 5}{1 \times 2} \right) \times \left(\frac{9}{1} \right) = 135$$

Finalmente:

$$P = \frac{135}{455} = \frac{27}{91}$$

Rpta. D**RESOLUCIÓN 91**

El número de casos posibles estará dado por todos los grupos de 4 a elegir de las 30 variedades

$$C_4^{30} \text{ será el total de formas}$$

Ahora los casos favorables podrán ser:

i. 3 variedades que florecen y la otra no

Los 3 que florecen se eligen de 12 formas posibles, la que no florece se elige de 18 formas.

$$\text{Cantidad de formas} = C_3^{12} \times C_1^{18}$$

ii. 4 variedades que florece

Se escoge de 12, se tendrá:

$$\text{Cantidad de formas} = C_4^{12}$$

De (i) y (ii):

$$\text{Total} = C_3^{12} \times C_1^{18} + C_4^{12}$$

Finalmente la probabilidad pedida estará dada por:

$$P = \frac{C_3^{12} \times C_1^{18} + C_4^{12}}{C_4^{30}}$$

$$P = \frac{\left(\frac{12 \times 11 \times 10}{3!} \times 18 \right) + \left(\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4!} \right)}{\left(\frac{30 \times 29 \times 28 \times 27}{4!} \right)}$$

$$\therefore P = \frac{33}{203}$$

Rpta. B**RESOLUCIÓN 92**

De las cartas: 26 son negras

26 son rojas

Luego, elegir 5 cartas de 52 se tendría:

$$C_2^{52} \text{ formas diferentes}$$

Ahora:

$$\text{escoger 3 cartas negras: } C_3^{26}$$

$$\text{escoger 2 cartas rojas: } C_2^{26}$$

$$\text{El total de formas será: } C_3^{26} \times C_2^{26}$$

Donde:

$$P = \frac{C_3^{26} \times C_2^{26}}{C_5^{52}} = \frac{1625}{4998}$$

Rpta. B**RESOLUCIÓN 93**

El primer automóvil, puede elegir cualquiera de los estacionamientos señalados A, B, C, esto es de 3 formas.

El segundo, también podrá elegir 3 formas.

Luego los dos automóviles podrán distribuirse de $3 \times 3 = 3^2$ formas diferentes.

El tercero, cuarto y quinto también elegirán 3 formas diferentes, luego el total de formas a distribuir será:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$$

Sea el evento A:

"En el estacionamiento A hay 3 automóviles".

Para que esto suceda, los otros dos automóviles deben de estar en B y C, esto es que cada uno puede elegir 2 formas, luego el total de formas en que los dos automóviles se distribuyen en B y C es $2 \times 2 = 4$ formas.

Y el número de formas de escoger grupos de 3 automóviles (en A) de 5, está dado por: C_3^5 , por tanto el número de casos favorables de A es:

$$n(A) = C_3^5 \times 4$$

de donde:

$$P_{[A]} = \frac{C_3^5 \times 4}{243} = \frac{40}{243}$$

Rpta. D**RESOLUCIÓN 94**

Señalamos a los jugadores A, B y C:

	Probabilidad de encastrar	Probabilidad de no encastrar
A	0,2	0,8
B	0,3	0,7
C	0,5	0,5

Luego, se puede señalar los siguientes casos:

i. Encesta A y B, no encesta C (C') como son eventos independientes, la probabilidad de que ocurran los 3 estará dado por:

$$P_{[A]} \times P_{[B]} \times P_{[C']} = (0,2) \times (0,3) \times (0,5) = 0,030$$

ii. Encesta B y C, no encesta A (A') similar al anterior, se tendrá:

$$P_{[A']} \times P_{[B]} \times P_{[C]} = (0,8) \times (0,3) \times (0,5) = 0,120$$

iii. Encesta A y C no encesta B (B')

$$P_{[A]} \times P_{[B']} \times P_{[C]} = (0,2) \times (0,7) \times (0,5) = 0,070$$

Como cada uno de los casos es mutuamente excluyente (ocurre uno y no los demás), entonces, la probabilidad de que dos encesten y el otro no, está dado por:

$$P = 0,030 + 0,120 + 0,070 = 0,22$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 95

Al afirmar que José viajará, está señalando un evento seguro, además:

Ω : "Viaja a Arequipa"



Sean los eventos V_A , V_B , V_C , viajar a Arequipa utilizando las líneas A, B y C respectivamente, se conoce que:

$$P_{[V_A]} = 0,3$$

$$P_{[V_C]} = 0,6$$

Además:

$$V_A \cup V_B \cup V_C = \Omega$$

No hay otra línea de transporte

Además son mutuamente excluyentes

Luego:

$$P_{[V_A]} + P_{[V_B]} + P_{[V_C]} = 1$$

Pero:

$$P_{[V_A]} + P_{[V_B]} = 1 - P_{[V_C]} = P_{[V_C']}$$

no se elige
línea C

Reemplazando:

$$0,3 + P_{[V_B]} = 0,6$$

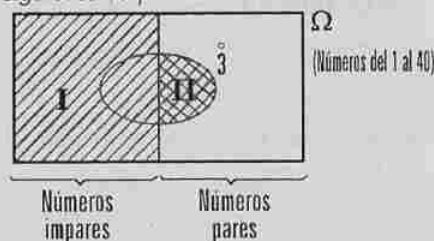
$$\therefore P_{[V_B]} = 0,3$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 96

Escoger 1 número de 40, habría 40 formas posibles.

Para señalar los casos favorables, realizamos el siguiente esquema:



Según el evento A: "número impar o 3".

La región sombreada es lo que señala el evento A, se desea encontrar los elementos:

i. Números impares: 1, 3, 5, ..., 39

→ Habrá 20 números impares

ii. Esta región está señalada como aquellos que son 3 y además sean pares (2), es decir son 6, luego los números serán: 6, 12, 18, ..., 36

→ Habrán 6 números

Total de números: $20 + 6 = 26$

$$\text{Finalmente: } P_{[A]} = \frac{26}{40} = \frac{13}{20} = 0,65$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 97

El total de formas de sentarse 6 personas alrededor de un centro, está dado por:

$$P_C(6) = 5! = 120 \text{ formas}$$

Pero deseando que se cumpla el evento A: "3 personas ocupen lugares continuos"

Se considera que las 3 personas forman un solo elemento, lo que indicaría que hay 4 elementos a permutar circularmente:

$$P_C(4) = 3! = 6 \text{ formas}$$

Pero cada una de estas formas, cambiará según se altere la forma como las 3 personas se sienten, y esto será:

$$P_3 = 3! = 6 \text{ formas}$$

Habrán entonces: $6 \times 6 = 36$ formas diferentes para que se cumpla el evento A

$$\text{Luego: } P_{[A]} = \frac{36}{120} = 0,3$$

Rpta. A

RESOLUCIÓN 98

Casos posibles: Las diferentes ordenaciones en que los empleados puedan escoger las tarjetas, esto será:

$$P_6 = 6! = 720 \text{ formas}$$

Casos Favorables: Para que el primer empleado tome la tarjeta que le corresponda, habrá 6 formas a realizar (cada uno de los seis con su respectiva tarjeta). Pero el segundo empleado tendrá 5 formas a elegir (el primero ya salió llevándose su tarjeta correcta). Luego

el total de formas en que se han realizado:

$$6 \times 5 = 30 \text{ formas}$$

$$\text{Luego: } P = \frac{30}{720} = \frac{1}{24}$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 99

Sean los eventos

A: "obtener cara y sacar una bola azul de la primera urna"

B: "obtener sello y sacar una bola azul de la segunda urna"

Se observa que ambos, A y B son mutuamente excluyentes, no ocurre a la vez.

Se cumple: $P_{[A \cup B]} = P_{[A]} + P_{[B]} \dots (I)$

i. Hallando $P_{[A]}$

Se tienen dos eventos:

A_1 : "obtener cara"

A_2 : "sacar una bola azul de la primera urna"

Donde: $A = A_1 \cap A_2$, además

A_1 y A_2 son independientes, luego:

$$P_{[A]} = P_{[A_1 \cap A_2]} = P_{[A_1]} \times P_{[A_2]}$$

$$P_{[A_1]} = \frac{1}{2}, \quad P_{[A_2]} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Entonces: } P_{[A]} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

ii. Hallando $P_{[B]}$

Similar al anterior

B_1 : "obtener sello"

B_2 : "sacar una bola azul de la segunda urna"

$B = B_1 \cap B_2$ (B_1 y B_2 independientes)

$$P_{[B]} = P_{[B_1]} \times P_{[B_2]} = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{2}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

Reemplazando en (I) :

$$P_{[A \cup B]} = P_{[A]} + P_{[B]}$$

$$\therefore P_{[A \cup B]} = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{7}{15}$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 100

El número de casos posibles, esta dado por todas las ordenaciones que se pueden formar con 10 elementos (televisores) tomados de 5 en 5

Esto será :

$$P_5^{10} = \frac{10!}{5!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$$

El número de casos favorables consiste en tener la siguiente ordenación.



Esto es:

Hay que tomar 3 elementos (televisores defectuosos) y ordenarlos según las ubicaciones señaladas. Hay 4 televisores defectuosos.

Se tendrá :

$$P_3^4 = \frac{4!}{1!}$$

Pero cada una de las ordenaciones anteriores se distribuye con las diferentes ordenaciones de dos elementos (televisores no defectuosos) de 6 que se tienen, esto será:

$$P_2^6 = \frac{6!}{4!}$$

El total de formas $P_3^4 \times P_2^6$

Luego la probabilidad será:

$$P = \frac{P_3^4 \times P_2^6}{P_5^{10}} = \frac{\left(\frac{4!}{1!}\right) \left(\frac{6!}{4!}\right)}{\left(\frac{10!}{5!}\right)} = \frac{6 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}$$

$$\therefore P = \frac{1}{42}$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 101

Para que sumen 10 cifras 88, puede ser:

i. 9 cifras 9 y una cifra 7

ii. 8 cifras 9 y dos cifras 8

no hay más posibilidades

De (i), el total de números será dado por:

$$P_{R_9}^{10} = \frac{10!}{9!} = 10 \text{ formas}$$

De (ii), el total será :

$$P_{R_8}^{10} = \frac{10!}{8!2!} = 45 \text{ formas}$$

En total hay 55 números

Ahora señalemos lo que son pares

De (i) no habrá ninguno par

De (ii) se tendrá:

$$\left. \begin{array}{l} 99 \dots 988 \\ 99 \dots 898 \\ \vdots \\ 98 \dots 998 \\ 89 \dots 998 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Una cifra 8 queda al final (para que sea} \\ \text{par) y las demás cifras permutan:} \\ P_{R_{8,1}}^9 = \frac{9!}{8!} = 9 \end{array}$$

La probabilidad P , pedida será:

$$P = \frac{9}{55}$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 102

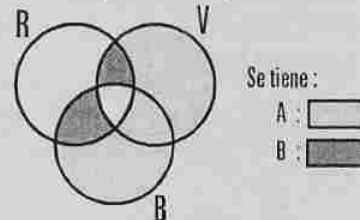
Sean los eventos:

A : "Ninguna bola es roja"

D : "son de distinto color"

Se desea hallar la probabilidad de que se cumple A ó D, esto es $A \cup D$.

Utilizando el siguiente diagrama:



Se tiene:

A : ☐

B : ☒

Se observa que el espacio muestral son todas las posibles combinaciones utilizando bolas rojas (R), verdes (V) y blancas (B). Nótese que no hay elementos en la intersección de R, V y B.

Además :

$$P_{[A \cup D]} = 1 - P_{[\overline{A \cup D}]} \dots (1)$$

Donde se puede apreciar :

$\overline{A \cup D}$: Las bolas son sólo rojas (región sin sombrear del diagrama)

$$\text{Calculando: } P_{[\overline{A \cup D}]} = \frac{C_2^3}{C_2^{10}} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

Reemplazando en (1) :

$$P_{[A \cup D]} = 1 - \left(\frac{1}{15}\right) = \frac{14}{15}$$

Rpta. E

RESOLUCIÓN 103

Dado el conjunto de n elementos, la totalidad de subconjuntos binarios está dado por :

$$C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Luego la probabilidad de obtener un subconjunto binario de los 2^n subconjuntos será :

$$\frac{\text{Número de subconjuntos binarios}}{\text{total de subconjuntos}} = \frac{n(n-1)/2}{2^n} = \frac{5}{16}$$

$$\text{Se obtiene: } \frac{n(n-1)}{2^n} = \frac{5}{8}$$

$$\text{Luego: } n = 5$$

$$\text{Total de subconjuntos: } 2^5 = 32$$

Número de subconjuntos propios :

$$32 - 1 = 31$$

Luego, la probabilidad P de obtener un subconjunto propio es :

$$\frac{\text{Número de subconjuntos propios}}{\text{total de subconjuntos}} = P = \frac{31}{32}$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 104

Sea el evento A : "en el comité hay una mujer por lo menos"

Se conoce que :

$$P_{[A]} = 1 - P_{[A']}]$$

Donde A' : "en el comité no hay ninguna mujer"

Que equivale : "en el comité sólo hay hombres"

Calculando: $P_{[A']}]$

Total de comités :

$$C_6^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 210 \text{ formas}$$

Total de comités formado por hombres :

$$C_6^7 = 7$$

$$\text{Luego: } P_{[A']} = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$$

De donde :

$$P_{[A]} = 1 - P_{[A']} = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

$$\therefore P_{[A]} = \frac{29}{30}$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 105

Se encuentran todas las posibles palabras de 8 letras, utilizando: M, E, D, C, N, A, I, I, aparecen permutaciones con repetición, esto será:

$$P_{R 1,1,1,1,1,1,1,2} = \frac{8!}{2!}$$

Los casos favorables tendrán la forma:

I - - - - - I

es decir que las letras I estén al inicio y al final, luego en los 6 espacios deberán de aparecer todas las ordenaciones posibles con las letras M, E, D, C, N, A, esto será:

$$P_6 = 6!$$

Luego la probabilidad será:

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{6!}{\frac{8!}{2!}} = \frac{6!2!}{8 \times 7 \times 6!} = \frac{1}{28}$$

Rpta. A

RESOLUCIÓN 106

Sea el espacio muestral

Ω : "extrae tres cartas"

Y los eventos:

A: "resulten números consecutivos crecientes"

B: "resulten impares"

C: "resulten pares"

Luego, el total de formas que se puede extraer 3 tarjetas será:

$$C_3^{10} = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120 \text{ formas}$$

i. Para que se produzca A, sólo se puede dar las siguientes formas:

(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), ..., (8, 9, 10)

esto es de 8 formas posibles:

ii.

$$\text{Luego: } P_{[A]} = \frac{8}{120}$$

Que se obtenga 3 números impares, estos deben de escogerse de 1, 3, 5, 7 ó 9.

Luego se tendrá:

$$C_3^5 = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10 \text{ formas}$$

donde:

$$P_{[B]} = \frac{10}{120}$$

iii. Similar al anterior, se tendrá:

$$P_{[C]} = \frac{10}{120}$$

Como A, B, C son mutuamente excluyentes la probabilidad de que ocurra A ó B ó C esto es $A \cup B \cup C$ estará dada por:

$$P_{[A \cup B \cup C]} = P_{[A]} + P_{[B]} + P_{[C]}$$

$$P_{[A \cup B \cup C]} = \frac{8}{120} + \frac{10}{120} + \frac{10}{120} = \frac{28}{120} = \frac{7}{30}$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 107

Sean los eventos:

A: "invita 8 amigos"

B: "invita 7 amigos"

Se desea la probabilidad de que ocurra A ó B ($A \cup B$), como son excluyentes se tendrá:

$$P_{[A \cup B]} = P_{[A]} + P_{[B]}$$

1. Calculando $P_{[A]}$, sean M, N, y P las personas que no pueden estar juntas
Total de formas favorables

está M (no están N, P): $1 \times C_7^9$

está N (no están M, P): $1 \times C_7^9$

está P (no están M, N): $1 \times C_7^9$

no están M, N, P: C_8^9

Se tendrá:

$$3 C_1^9 + C_8^9 = 3 \left(\frac{9 \times 8}{2} \right) + 9 = 117$$

Las formas posibles:

$$C_8^{12} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 495$$

$$\text{Luego: } P_{[A]} = \frac{117}{495} = \frac{13}{55}$$

2. Cálculo de $P_{[B]}$ en forma similar

se tendrá:

$$3 \times C_6^9 + C_7^9 = 3 \left(\frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} \right) + \left(\frac{9 \times 8}{2} \right) = 288 \text{ formas favorables}$$

las formas posibles:

$$C_7^{12} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 792$$

$$\text{Luego: } P_{[B]} = \frac{288}{792} = \frac{4}{11}$$

Finalmente:

$$P_{[A \cup B]} = \frac{13}{55} + \frac{4}{11} = \frac{33}{55}$$

$$\therefore P_{[A \cup B]} = \frac{3}{5}$$

Rpta. A

RESOLUCIÓN 108

El total de formas para ordenar 8 banderas: 5 amarillas y 3 blancas está dado por:

$$P_{R 5,3}^8 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56$$

Pero consideremos el siguientes caso:



Se deberá de colocar las demás banderas 4 amarillas y 2 blancas

$$\text{Luego: } P_{R 4,2}^6 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15 \text{ formas}$$

Similar se tendrá cuando:



con 15 formas

habrá $15 + 15 = 30$ formas en que las banderas de los extremos son de diferente color.

Finalmente la probabilidad señalada será:

$$\frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 109

Se puede señalar los siguientes eventos:

A: "El puntaje de un dado es par y se extrae 3 bolas azules"

B: "El puntaje de un dado es impar y se extrae 2 bolas azules."

Ambos eventos A y B son mutuamente excluyentes, ocurre A pero no B y viceversa, luego:

$$P_{[A \cup B]} = P_{[A]} + P_{[B]}$$

i. Hallando $P_{[A]}$, a su vez se distribuyen 2 eventos:

A_1 : "obtener puntaje par"

A_2 : "extraer 3 bolas azules"

A_1 y A_2 son independientes, luego:

$$P_{[A_1 \cap A_2]} = P_{[A_1]} \times P_{[A_2]} = P_{[A]}$$

$$P_{[A_1]} = \frac{3 \text{ (puede salir 2, 4, 6)}}{6 \text{ (puede salir 1, 2, ..., 6)}} = \frac{1}{2}$$

$$P_{[A_2]} = \frac{C_3^4}{C_3^{12}} = \frac{4}{220}$$

$$\text{Luego: } P_{[A]} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{220} = \frac{1}{110}$$

ii. Hallar $P_{[B]}$, similar a lo anterior

B_1 : "obtener puntaje impar"

B_2 : "extraer 2 bolas azules"

B_1 y B_2 independientes, luego :

$$P_{[B]} = P_{[B_1]} \times P_{[B_2]} = \frac{1}{2} \times \frac{C_2^4}{C_2^{12}} = \frac{1}{22}$$

Finalmente : $P_{[A \cup B]} = P_{[A]} + P_{[B]}$

$$\therefore P_{[A \cup B]} = \frac{1}{110} + \frac{1}{22} = \frac{3}{55}$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 110

Sea N el número de 15 cifras, para que sumen 133, se tendrá las siguientes formas:

i. 14 cifras son 9 y una es 7

ii. 13 cifras son 9 y dos son 8

No hay más posibilidades

Hallando la cantidad de números posibles de esta forma :

i. Se permutará la cifra 9 con repetición de 14 cifras y 1 cifra 7, esto será:

$$P_{R_{14,1}}^{15} = \frac{15!}{14!1!} = 15$$

ii. Similar al anterior :

$$P_{R_{13,2}}^{15} = \frac{15!}{13!2!} = \frac{15 \times 14}{2} = 105$$

en total se tendrá $15 + 105 = 120$

Los casos favorables será cuando el número sea capicúa :

i. Con 14 cifras 9 y 1 cifra 7 sólo hay un número capicúa : 99 ... 979 ... 99

ii. Con 13 cifras 9 y 2 cifras 8 se obtendrá :

$$\left. \begin{array}{l} 89 \dots 999 \dots 98 \\ 98 \dots 999 \dots 89 \\ \vdots \\ 99 \dots 898 \dots 99 \end{array} \right\} \text{Habrá 7 números capicúas.}$$

Total de números capicúas = $1 + 7 = 8$

Luego la probabilidad será : $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$

Rpta. E

RESOLUCIÓN 111

Sea :

Ω : "Luis se ubica en una fila de 10 asientos sin que ninguna sea el extremo y 3 personas más se sientan en la misma fila"

A : "Los lugares vecinos están desocupados"

Hallando el número de elementos de Ω : 4 elementos a ubicarse en 10 posiciones.

Luis (el primero) puede escoger 8 asientos, el segundo puede escoger 9 asientos, el tercero y cuarto pueden escoger de 8 y 7 asientos.

Total de formas :

$$8 \times 9 \times 8 \times 7 = 4032$$

Luego el número de casos favorables para que se produzca A será considerando que los asientos contiguos a Luis no pueden ser escogidos por los demás.

Luego L :

Luis puede escoger 8 asientos,

el segundo sólo puede escoger $(10 - 3) = 7$

el tercero sólo puede escoger $(10 - 4) = 6$

el cuarto sólo puede escoger $(10 - 5) = 5$

Los casos favorables $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$

$$\text{Luego : } P_{[A]} = \frac{1680}{4032} = \frac{5}{12}$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 112

Sea

D : "obtener tornillo defectuoso"

B : "obtener tornillo bueno"

Se puede obtener las siguientes pruebas en que aparezca el segundo defectuoso, en la tercera prueba.

$$1. D_1 B_2 D_3 \quad 2. B_1 D_2 D_3$$

Como ocurre uno o el otro entonces la probabilidad P buscada será la suma de las probabilidades por separado.

$$1. D_1 B_2 D_3$$

Al sacar D_1 (tornillo defectuoso en la primera prueba)

$$\text{Se tiene : } P_{[D_1]} = \frac{C_1^2}{C_1^{50}} = \frac{2}{50}$$

$$\text{Similar : } P_{[B_2]} = \frac{C_1^{48}}{C_1^{49}} = \frac{48}{49}$$

$$\text{También } P_{[D_3]} = \frac{C_1^1}{C_1^{48}} = \frac{1}{48}$$

Luego :

$$P_{[D_1 B_2 D_3]} = \frac{2}{50} \times \frac{48}{49} \times \frac{1}{48}$$

$$2. B_1 D_2 D_3$$

Se tendrá directamente :

$$P_{[B_1 D_2 D_3]} = \frac{C_1^{48}}{C_1^{50}} \times \frac{C_1^2}{C_1^{49}} \times \frac{C_1^1}{C_1^{48}} = \frac{48}{50} \times \frac{2}{49} \times \frac{1}{48}$$

Finalmente :

$$P = \frac{2 \times 48 \times 1}{50 \times 49 \times 48} + \frac{48 \times 2 \times 1}{50 \times 49 \times 48}$$

$$\therefore P = \frac{2}{1225}$$

Rpta. A

RESOLUCIÓN 113

Sea :

Ω : "extraer un número de tres cifras"

A : "obtener un número capicúa"

A' : "no obtener un número capicúa"

Se cumple : $P_{[A']} = 1 - P_{[A]}$

Calculando : $P_{[A]}$

Cantidad de números de 3 cifras = 900

Cantidad de números capicúas de 3 cifras = 90

$$\text{Luego : } P_{[A]} = \frac{90}{900} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Reemplazando : $P_{[A']} = 1 - 0,1 = 0,9$

$$P_{[A']} = [0,9 \times 100\%] = 90\%$$

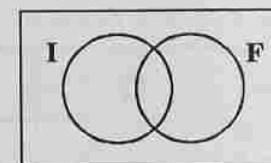
Rpta. E

RESOLUCIÓN 114

Sea el siguiente diagrama de los eventos :

I : "estudia inglés"

F : "estudia francés"



Se conoce : $P_{[I]} = 0,75$

$$P_{[F]} = 0,50$$

I, F no son excluyentes, se tiene también :

$$P_{[I \cup F]} = 0,85$$

Pero :

$$P_{[I \cup F]} = P_{[I]} + P_{[F]} - P_{[I \cap F]}$$

Reemplazando:

$$0,85 = 0,75 + 0,5 - P_{[I \cap F]}$$

de donde: $P_{[I \cap F]} = 0,4$

Probabilidad de que estudie ambos.

Rpta. C

RESOLUCIÓN 115

El problema consiste en escoger aleatoriamente un grupo de 6 personas de las 12, de modo que este formado por parejas; evidentemente si este grupo queda conformado así, el otro también estará formado por parejas.

Sea A : "escoger 3 parejas de 12 personas"

$$P_{[A]} = \frac{C_3^6 \times C_3^6}{C_6^{12}} = \frac{\frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3}}{\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}}$$

$$\therefore P_{[A]} = 0,43$$

Rpta. A

RESOLUCIÓN 116

Se conoce de 60 personas: habrá hombres y mujeres, así como también habrá quienes tengan 17 años, 18 años y no tengan 17 ni 18 años.

Indicamos el siguiente diagrama:

Hombres	n	10
Mujeres	4	6
	De 17 años	De 18 años
		No tienen 17 ni 18 años

Como el total es de 60 personas
 $n + 10 + 4 + 6 + 10 = 60$
 $n = 30$

Ahora señala que al escoger al azar a una persona, se sabe que es hombre, entonces el espacio muestral correspondiente será:

Hombres

30	10
De 17 ó 18 años	no tienen 17 ni 18 años

Sea el evento:

A : "hombre que tenga 17 ó 18 años"

Se tendrá:

$$P_{[A]} = \frac{30 \text{ (favorables)}}{40 \text{ (posibles)}} = 0,75$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 117

Sean los eventos:

M : "llevar matemática"

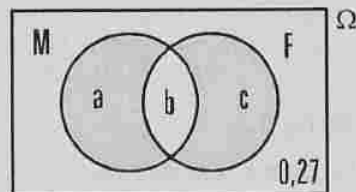
F : "llevar física"

Se conoce:

$$P_{[M']} = 0,49 = 1 - P_{[M]} \Rightarrow P_{[M]} = 0,51$$

$$P_{[F']} = 0,53 = 1 - P_{[F]} \Rightarrow P_{[F]} = 0,47$$

En un diagrama:



$$\frac{P_{[\Omega]}}{1} = \frac{P_{[M' \cap F']} + P_{[M \cap F]}}{0,27}$$

$$\text{Luego: } P_{[M \cap F]} = 0,72$$

Pero a su vez:

$$P_{[M]} = a + b = 0,51$$

$$P_{[F]} = b + c = 0,47$$

$$P_{[M \cup F]} = a + b + c = 0,72$$

$$\text{Resolviendo: } a = 0,25 \quad c = 0,21$$

$$\text{Se desea hallar: } a + c = 0,46$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 118

Sea la habilidad de los jóvenes como 1 entonces la habilidad de los adultos será como 2 esto es que jugaran como si fueran 2 personas jóvenes.

Entonces se podría decir que en vez de considerar 3 adultos, estos fueran:

$$3(2) = 6 \text{ jóvenes}$$

Luego:

Sea A : "probabilidad de que gane un joven"

$$P_{[A]} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{\text{sólo hay 5 jóvenes}}{5 \text{ jóvenes} + 3 \text{ adultos}} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow P_{[A]} = \frac{5}{5+6} = \frac{5}{11}$$

Rpta. D

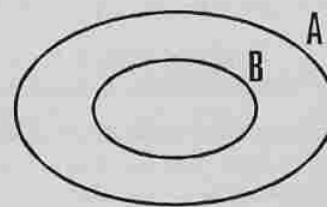
RESOLUCIÓN 119

Al retirar la carta negra quedarán 25 cartas negras y 26 cartas rojas

Luego A : "extraer 13 cartas del mismo color"

B : "extraer 13 cartas rojas"

Observe que: $B \subset A$



Podemos considerar a A como el espacio muestral para conocer la probabilidad de B .

Luego:

$$P_{[B]} = \frac{\text{Cantidad de formas de sacar 13 rojas}}{\text{Cantidad de formas de sacar 13 del mismo color}}$$

1. Formas de sacar del mismo color

$$a. \text{ Todas rojas: } C_{13}^{26}$$

$$b. \text{ Todas negras: } C_{13}^{25}$$

$$\text{Total de formas: } C_{13}^{26} + C_{13}^{25}$$

2. Formas de sacar todas rojas: C_{13}^{26}

Luego:

$$P_{[B]} = \frac{C_{13}^{26}}{C_{13}^{26} + C_{13}^{25}} = \frac{1}{1 + \frac{C_{13}^{25}}{C_{13}^{26}}}$$

$$P_{[B]} = \frac{1}{1 + \frac{25! \times 13!}{12! \times 26!}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 120

Sean E_A , E_B , E_C , los eventos que corresponden a estudiar los cursos A, B y C, respectivamente.

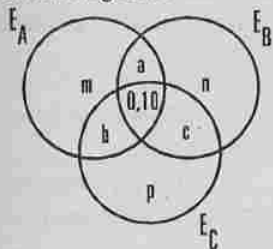
$$P_{[E_A]} = \frac{8}{25} = 0,32$$

$$P_{[E_B]} = \frac{11}{50} = 0,22$$

$$P_{[E_C]} = \frac{9}{20} = 0,45$$

$$P_{[E_A \cap E_B \cap E_C]} = 10\% = 0,10$$

Indicando en un diagrama



Además:

estudian
por lo menos
un curso

$$P[E_A \cup E_B \cup E_C] = 0,55 = m + n + p + a + b + c + 0,10$$

$$\text{También: } 0,32 = m + a + b + 0,10$$

$$0,22 = n + a + c + 0,10$$

$$0,45 = p + b + c + 0,10$$

Sumando las tres últimas expresiones:

$$0,99 = (m+n+p) + 2(a+b+c) + 0,30$$

Pero:

$$0,55 = (m+n+p) + (a+b+c) + 0,10$$

$$\text{Restando: } 0,44 = a + b + c + 0,20$$

$$0,24 = a + b + c$$

Probabilidad de
estudiar 2 cursos.

Rpta. B

RESOLUCIÓN 121

Sean los eventos R_A , R_B , R_C aquellos en que A, B y C respectivamente,
resuelven el mismo problema.

Luego:

$$P[R_A] = \frac{3}{5} \Rightarrow P[R'_A] = \frac{2}{5}$$

$$P[R_B] = \frac{1}{2} \Rightarrow P[R'_B] = \frac{1}{2}$$

$$P[R_C] = \frac{2}{3} \Rightarrow P[R'_C] = \frac{1}{3}$$

Se ha encontrado las probabilidades de que no
resuelvan el problema, como estos eventos
son independientes se cumplirá:

$$P[R'_A \cap R'_B \cap R'_C] = P[R'_A] \times P[R'_B] \times P[R'_C]$$

$$P[R'_A \cap R'_B \cap R'_C] = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

Esto es: la probabilidad de que ninguno de
ellos, ni A ni B, ni C, resuelvan el problema
es $1/15$.

Se observa que:

A: "no resuelve el problema ni A, ni B, ni C"

A': "resuelve el problema A ó B ó C", es decir
resuelven el problema juntos"

$$P[A'] = 1 - P[A] = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$$

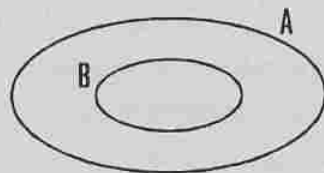
$$\therefore P[A'] = \frac{14}{15}$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 122

Sean los eventos:

A: "han fallado dos elementos de tres"

B: "han fallado el primero y el segundo después
de A"Se observa $B \subset A$ 

Luego tomamos A como espacio muestral de B

$$P[B] = \frac{\text{Formas de fallar el 1º y 2º}}{\text{formas de fallar 2 elementos}} \dots (I)$$

Sin embargo no hay manera de calcular las
formas de fallar, dan la probabilidades, enton-
ces buscamos su equivalente:Dividimos cada expresión de (I) por el total de
fallas

$$P[B] = \frac{\text{formas de fallar 1º y 2º} / \text{total de fallas}}{\text{forma de fallar 2 elementos} / \text{total de fallas}}$$

$$P[B] = \frac{\text{probabilidad que falle el 1º y 2º}}{\text{probabilidad que fallen 2 elementos}}$$

Luego la probabilidad que fallen 2 elementos
está dado por:

a. Falla el 1º y 2º, la probabilidad será:

$$P_1 \times P_2 \text{ (son independientes)}$$

b. Falla el 2º y 3º, la probabilidad será:

$$P_2 \times P_3$$

c. Falla el 1º y 3º, la probabilidad será:

$$P_1 \times P_3$$

Reemplazando:

$$P[B] = \frac{P_1 \times P_2}{P_1 \times P_2 + P_2 \times P_3 + P_1 \times P_3}$$

Reemplazando y efectuando:

$$P[B] = 0,25$$

Observación:

$$P[B] \neq P_1 \times P_2$$

Porque B está condicionado a que se cumpla
A.

Rpta. B

RESOLUCIÓN 123

Del enunciado:

Luego: $P[A]$ donde A es sacar una bola
cuyo número sea mayor a 14. Se tendrá:

$$P[A] = \frac{\text{casos favorables (6)}}{\text{casos posibles (20)}} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore P[A] = 0,3 = 30\%$$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 124

Realizando el siguiente diagrama

Sea T el total de estudiantes:

Hombres 70% T

Mujeres 30% T

95% (70%T)	5% (70%T)
97% (30%T)	3% (30%T)
No tienen ojos azules	tienen ojos azules

Se pide hallar la probabilidad P, donde:

$$P = \frac{\text{estudiantes mujeres y con ojos azules}}{\text{estudiantes de ojos azules}}$$

$$P = \frac{3\% (30\% T)}{5\% (70\% T) + 3\% (30\% T)}$$

$$\therefore P = \frac{9}{44}$$

Rpta. B

RESOLUCIÓN 125

Según el enunciado se tiene el siguientes dia-
grama:

varones

mujeres

n	m
3m	n
Ingenieros	Arquitectos

$$\text{Sean: } 66 = 3m + n + m + n = 4m + 2n$$

$$\text{Son mujeres } 45 = 3m + n \quad (I)$$

Resolviendo (I): $m = 12$, $n = 9$

Luego se pide hallar: $P_{(A/M)}$ donde

A/M : "sea arquitecta sabiendo que es mujer"

Luego:

$$P_{[A/M]} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Del diagrama:

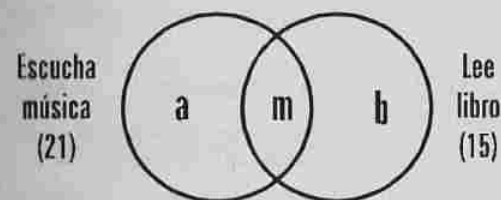
$$P_{[A/M]} = \frac{\text{número de mujeres arquitectas}}{\text{números de mujeres}} = \frac{n}{45} = \frac{9}{45}$$

$$\text{Luego: } P_{[A/M]} = \frac{1}{5}$$

Rpta. A

RESOLUCIÓN 126

Se tiene el siguiente diagrama:



$$\text{Escucha música: } 21 = a + m$$

$$\text{lee libro: } 15 = b + m$$

$$\text{Total días de Enero } 31 = a + b + m$$

$$\text{Resolviendo (I): } a = 16, b = 10, m = 5$$

Se pide hallar: $P_{[L/M]}$, donde:

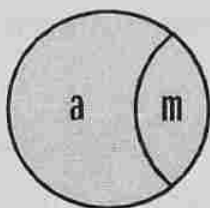
L/M : "Lee un libro, sabiendo que escucha música"

Luego:

$$P_{[L/M]} = \frac{\text{número de días que lee un libro y escucha música}}{\text{número de días que escucha música}}$$

$$P_{[L/M]} = \frac{m}{a+m} = \frac{5}{21}$$

Escucha
música



Lee libro y
escucha música

Rpta. D

RESOLUCIÓN 127

Sean los eventos G_A, G_B, G_C , los eventos correspondientes a que Andrés, Beto y Carlos anoten un gol correspondiente, luego:

$$P_{[G_A]} = \frac{1}{3}, P_{[G_B]} = \frac{1}{2}, P_{[G_C]} = \frac{1}{4}$$

$$P_{[G_A']} = \frac{2}{3}, P_{[G_B']} = \frac{1}{2}, P_{[G_C']} = \frac{3}{4}$$

Se desea hallar que al menos uno anote un gol, o sea que anote Andrés (G_A) ó anote Beto (G_B) ó anote Carlos (G_C) esto es $G_A \cup G_B \cup G_C$

Se pide hallar:

$$P_{[G_A \cup G_B \cup G_C]}$$

Pero por complemento:

$$P_{[G_A \cup G_B \cup G_C]} = 1 - P_{[G_A' \cap G_B' \cap G_C']}$$

Por conjuntos se tiene:

$$= 1 - P_{[G_A' \cap G_B' \cap G_C']}$$

Pero son eventos independientes:

$$G_A, G_B, G_C$$

Luego: G_A', G_B', G_C' . También lo son:

$$= 1 - P_{[G_A']} \times P_{[G_B']} \times P_{[G_C']}$$

Reemplazando:

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Luego: } P_{[G_A \cup G_B \cup G_C]} = \frac{3}{4}$$

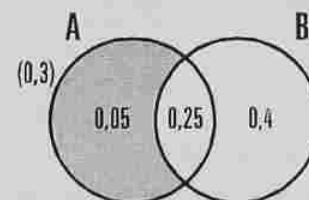
Rpta. D

RESOLUCIÓN 128

Para los eventos: A : "falle transistor A"

B : "falle transistor B"

Se puede señalar el diagrama:



$$P_{[A]} = 0,3$$

$$P_{[A \cap B]} = 0,25$$

$$P_{[B-A]} = 0,4$$

Recuerde: $A \cap B$: fallan ambos

$B - A$: Sólo falla B

Luego:

$P_{[A/A \cup B]}$: Probabilidad que falle A sabiendo que falló uno de ellos.

El espacio muestral se reduce a $A \cup B$

$$\text{Luego: } P_{[A/A \cup B]} = \frac{P_{[A]}}{P_{[A \cup B]}} \dots (I)$$

Se llega a esta expresión de:

$$P_{[A/A \cup B]} = \frac{\text{fallas posibles de A}}{\text{fallas posibles de A} \cup \text{B}}$$

dividiendo entre el valor de fallas totales del sistema:

$$P_{[A/A \cup B]} = \frac{(\text{fallas posibles de A} / \text{fallas totales})}{(\text{fallas posibles de A} \cup \text{B} / \text{fallas totales})}$$

$$P_{[A/A \cup B]} = \frac{P_{[A]}}{P_{[A \cup B]}} = \frac{0,3}{0,3+0,4} = \frac{3}{7}$$

$$\therefore P_{[A/A \cup B]} = \frac{3}{7}$$

Rpta. C

RESOLUCIÓN 129

Sea E : "Diana estudia"

I : "Diana ingresa"

Según el enunciado:

$$P_{[E]} = 0,3$$

$$P_{[I/E]} = 0,7$$

$$P_{[I'/E']} = 0,4$$

Del diagrama:

$$P_{[E]} = 0,3 = a + b \quad (\text{ingrese o no ingrese})$$

$$P_{[I/E]} = \frac{b}{a+b} = 0,7 \Rightarrow \text{Pero } a+b = 0,3$$

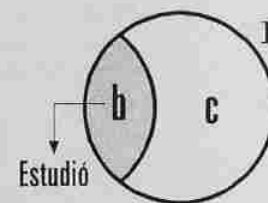
$$b = 0,21 \text{ y } a = 0,09$$

$$\text{Además: } P_{[E']} = 1 - P_{[E]} = 0,7 = c + d$$

$$P_{[I'/E']} = \frac{c}{c+d} = 0,4 \Rightarrow \text{Para } c+d = 0,7$$

$$c = 0,28, d = 0,42$$

Se pide hallar: $P_{[E/I]}$ se tiene:



$$P_{[E/I]} = \frac{b}{b+c}$$

Reemplazando: $P_{[E/I]} = \frac{0,21}{0,21 + 0,28}$

$P_{[E/I]} = 3/7$

Rpta. D

RESOLUCIÓN 130

Sean $45n$ la asistencia.

Fuman	no fuman	
44% (25n)	56% (25n)	hombres (25n)
8n	12n	mujeres (20n)

Se desea hallar $P_{[H/F]}$, esta es la probabilidad de que sea hombre si fuma, del gráfico:

$$P_{[H/F]} = \frac{\text{hombres que fuman}}{\text{total de fumadores}}$$

$$P_{[H/F]} = \frac{44\% (25n)}{44\% (25n) + 8n} = \frac{11}{19}$$

$$\therefore P_{[H/F]} = \frac{11}{19}$$

Rpta. D



ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

♦♦♦ *Análisis Combinatorio*

PROBLEMA 1

Si se cumple:

$$(((1!)^{2!} + 1!)^{2!} + 1!)^{2!} = m! + 1$$

Señale el valor de $(m+1)!$

- A) 6 B) 24 C) 120
D) 720 E) 5040

PROBLEMA 2

Si $c!$ es el doble de la media aritmética de $a!$ y $b!$. Encuentre el valor de:

$$(a! + b! + c!)^{a! + b! + c!}$$

- A) 1 B) 4 C) 64
D) 256 E) 27

PROBLEMA 3

Señale la suma de cifras de Q

$$Q = \frac{((1! + 2!) + 3!)!}{(1! + 2! + 3!)!}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 4

Si: $a! + b! = k$

Señale el valor de:

$$E = \frac{a+1}{(a+1)! + b! + (b-1)! \cdot a \cdot b}$$

- A) k B) k^{-2} C) $2k$
D) $2k^{-1}$ E) k^{-1}

PROBLEMA 5

Reducir:

$$E = \frac{1! \times (n-2)! + (n-1)! + n! \times 0!}{0! \times (n-2)! + (n-2)! \times (n-1)!}$$

- A) 0 B) 1 C) n
D) $n+1$ E) $n-1$

PROBLEMA 6

Dada la siguiente expresión:

$$a! + b! = \overline{ab} + a$$

Señale la suma de los posibles valores de $a+b$

- A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

PROBLEMA 7

Halle el valor de S .

$$S = 0! \times 1^2 + 1! \times 2^2 + 2! \times 3^2 + \dots + 19! \times 20^2$$

- A) $20!$ B) $20! - 1$ C) $21!$
D) $21! - 1$ E) $21! + 1$

PROBLEMA 8

Se define:

$$a \square b = \begin{cases} (a!) * b & \text{si } a \leq b \\ a * (b!) & \text{si } a > b \end{cases}$$

donde:

$$m * n = \begin{cases} (m+n)! & \text{si } m \leq n \\ (m-n)! & \text{si } m > n \end{cases}$$

Halle : $(2 \square 1) \square (1 \square 2)$

A) 6 B) 24 C) 120

D) 720 E) 5040

PROBLEMA 9

Conocido a, b, c y d , diferentes entre sí, de modo que :

$$\overline{abcd} = a! + b! + c! + d! + 9$$

Señale : $a + b + c + d$

A) 11 B) 12 C) 13

D) 15 E) 16

PROBLEMA 10

Halle la suma de:

$$S = \left[\frac{3!}{0!} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right] + \left[\frac{4!}{1!} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right] + \left[\frac{5!}{2!} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \right] + \dots$$

10 sumandos

A) 40 B) 45 C) 50

D) 55 E) 60

PROBLEMA 11

Halle $a + b + c$, conocido que :

$$a! + b! = \overline{a(2c)c}$$

A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 9

PROBLEMA 12

Encuentre el valor de S

$$S = \sum_{k=1}^{10} \left[\frac{(k!)^2}{(k-1)!} \right]$$

A) $10!$ B) $11!$ C) $10! + 1$

D) $10! - 1$ E) $11! - 1$

PROBLEMA 13

Siendo : $m = 21! + 22!$

Señale el valor de E :

$$E = \underbrace{1! \times 5 + 2! \times 11 + 3! \times 19 + 4! \times 29 + 5! \times 41 + \dots}_{20 \text{ sumandos}}$$

A) $m + 3$ B) $m + 1$ C) m

D) $m - 1$ E) $m - 3$

PROBLEMA 14

Conocido que a excede a b en 2 unidades y que la media aritmética de a y b es $c - 1$.

Señale el valor de E :

$$E = \frac{a! \times b!}{(b-1)! \times (a+1)!}$$

A) $\frac{c}{c-1}$ B) $\frac{c+1}{c-2}$ C) $\frac{c-2}{c+1}$

D) $\frac{c+3}{c+1}$ E) $\frac{c-1}{c-3}$

PROBLEMA 15

Si se cumple :

$$\frac{(a-b-1)! \times (b+1)!}{(a-b)! \times b!} = \frac{3!}{2!}$$

Halle la suma de los posibles valores de $\overline{ab}$

A) 23 B) 32 C) 75

D) 80 E) 107

PROBLEMA 16

¿Qué valor toma F ?

$$F = \prod_{k=2}^{10} \left[\frac{(k!)^2}{(k-1)! \times (k+1)!} \right]$$

A) 0,1

B) $0, \overline{1}$

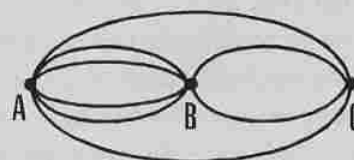
C) 0,18

D) $0, \overline{18}$

E) 0,2

PROBLEMA 17

¿De cuántas maneras distintas se hace un viaje de ida y vuelta, partiendo de A y llegando a C sin volver a recorrer ningún tramo de la ida?



A) 32

B) 23

C) 85

D) 90

E) 58

PROBLEMA 18

¿Cuántas palabras distintas se pueden formar al cambiar de lugar las letras de la palabra PIEDRA?

A) 23

B) 119

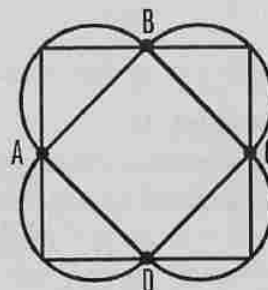
C) 719

D) 720

E) 120

PROBLEMA 19

¿De cuántas formas diferentes se podrá ir de A a D, sin pasar por el mismo camino, ni regresar por algún otro?



A) 120

B) 125

C) 130

D) 720

E) 625

PROBLEMA 20

¿Cuántas palabras diferentes que empiezan en V y terminan en vocal, pueden obtenerse con las letras de la palabra NIVELA, sin importar el sentido?

A) 24

B) 72

C) 48

D) 120

E) 720

PROBLEMA 21

¿De cuántas maneras se puede elegir una vocal y una consonante (diferente a C), de las letras de la palabra OCCIDENTAL?

A) 8

B) 4

C) 16

D) 48

E) 64

PROBLEMA 22

¿Cuántas palabras diferentes, de 10 letras, formadas por igual número de vocales y consonantes, se pueden formar sin interesar el sentido, tomando las letras de la palabra MURCIÉLAGO?

A) $2 \times (5!)$ B) $5 \times (2!)$ C) $10!$

D) $2! \times (10!)$ E) $2 \times (10!)$

PROBLEMA 23

Diana y Sofía acuden a una joyería, cada una desea comprar un collar y un anillo. El vendedor les ofrece un catálogo con 5 modelos de collar y 10 modelos de anillo.

Si lo que compra una debe de ser diferente a lo que compra la otra. ¿De cuántas maneras se puede efectuar la compra?

A) 2500

B) 2450

C) 2050

D) 1800

E) 1500

PROBLEMA 24

5 personas se encuentran en un vagón de un tren de pasajeros, donde hay 6 asientos libres. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ubicarse en los asientos, si uno de ellos desea estar sentado en un sitio determinado?

- A) 24 B) 25 C) 50
D) 100 E) 120

PROBLEMA 25

Ana, Bertha y Cristina postulan a 3 universidades. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ingresar a una facultad, si de la primera universidad les interesa 2 facultades; de la segunda, 3 facultades y de la última 2 facultades? Cada una puede ingresar a una sola facultad y desean estar en universidades diferentes?

- A) 60 B) 72 C) 120
D) 720 E) 5040

PROBLEMA 26

En un salón de clases, se quiere ubicar a 2 niños y 3 niñas en una sola fila de manera que los niños no se encuentren juntos. ¿De cuántas formas se podrá hacer?

- A) 24 B) 48 C) 72
D) 96 E) 120

PROBLEMA 27

¿Cuántos números impares de 4 cifras diferentes existen, si en su escritura no se utilizan las cifras 4, 5, 7 y 0?

- A) 1784 B) 1790 C) 1792
D) 1800 E) 1892

PROBLEMA 28

¿Cuántos números mayores a 128 y menores a 821, existen, si solo se utilizan cifras pares significativas en su escritura?

- A) 48 B) 60 C) 75
D) 120 E) 128

PROBLEMA 29

En una fila de 5 asientos se desean sentar 3 hombres y una mujer de modo que los hombres nunca se encuentren en un mismo lado de la mujer. ¿De cuántas maneras se podrá hacer?

- A) 30 B) 60 C) 90
D) 120 E) 130

PROBLEMA 30

¿De cuántas formas pueden sentarse 5 personas en una banca, si dos de ellas siempre están juntas?

- A) 12 B) 24 C) 36
D) 48 E) 60

PROBLEMA 31

¿De cuántas formas se pueden sentar en una fila de 5 butacas, 4 hombres y 1 mujer, de modo que la mujer no se ubique en ningún extremo de la fila?

- A) 24 B) 48 C) 60
D) 72 E) 120

PROBLEMA 32

¿Cuántos números impares de 2 cifras diferentes se pueden formar con las cifras 2, 3, 4, 5 y 6?

- A) 8 B) 10 C) 12
D) 20 E) 25

PROBLEMA 33

Se escriben los números mayores a 1000 y menores a 5000. ¿Cuántos poseen en su escritura sólo una cifra 7?

- A) 300 B) 324 C) 720
D) 900 E) 972

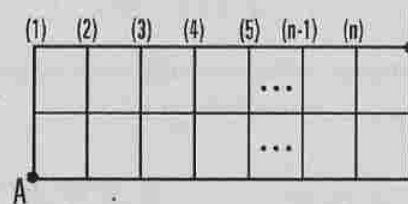
PROBLEMA 34

Se desea confeccionar un vestido formado por 3 piezas. Si se dispone de 6 cortes de tela de colores diferentes. ¿De cuántas maneras se puede confeccionar el vestido de modo que cada pieza sea de un color diferente?

- A) 20 B) 30 C) 60
D) 100 E) 120

PROBLEMA 35

Señale el número de caminos que existen para llegar a B, partiendo de A, siguiendo un recorrido mínimo.



Se indica "n" columnas

- A) n^2 B) $\frac{n(n+1)}{2}$
C) $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ D) $\frac{n(n-1)}{2}$
E) $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

PROBLEMA 36

En la final del X concurso nacional de Matemáticas, participan 12 alumnos de colegios diferen-

tes. ¿De cuántas formas se podrá ocupar los 3 primeros puestos, si no se produce empate alguno?

- A) 1230 B) 1320 C) 1200
D) 1300 E) 1600

PROBLEMA 37

¿Cuántos números de 3 cifras diferentes existen, tales que la suma de las dos primeras cifras sea 5?

- A) 32 B) 35 C) 40
D) 45 E) 125

PROBLEMA 38

¿Cuántos números de la forma $\overline{b(a-b)a}$ existen?

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 9 E) 10

PROBLEMA 39

Teresa, su novio, sus 3 hermanos y su abuelita van al cine. ¿De cuántas formas pueden sentarse en 6 asientos de una misma fila, si la abuelita esta sentada a un lado de Teresa?

- A) 48 B) 240 C) 96
D) 72 E) 720

PROBLEMA 40

Ana, Betty aceptan salir con César y David, pero este último lleva a su hermano menor Esteban. Desean sentarse en 5 butacas de una misma fila, donde Ana y César se encuentren juntos y Betty nunca este en medio de David y Esteban. ¿De cuántas maneras podrán sentarse?

- A) 48 B) 40 C) 32
D) 24 E) 8

PROBLEMA 41

¿Cuántos números de dos cifras existen tales que al sumar dicho número con el valor que resulta de invertir el orden de sus cifras, la suma obtenida sea diferente a un número que tenga cifras iguales?

- A) 30 B) 35 C) 40
D) 45 E) 50

PROBLEMA 42

¿Cuántas fracciones propias de la forma

$$\frac{ab}{bc} \text{ existen?}$$

- A) 405 B) 450 C) 454
D) 540 E) 504

PROBLEMA 43

Delia tiene 5 libros de matemática y 3 de física, todos ellos diferentes. Un día decide llevar un libro de matemática y un libro de física. ¿De cuántas maneras diferentes podrá hacerlo?

- A) 15 B) 12 C) 9
D) 20 E) 6

PROBLEMA 44

¿De cuántas formas diferentes se puede designar un presidente, un secretario y un tesorero, de una lista de 10 personas?

- A) 24 B) 120 C) 500
D) 720 E) 800

PROBLEMA 45

¿Cuántos números de la forma:

$$(a+5)b(c-2)(2a) \text{ existen?}$$

- A) 320 B) 400 C) 500
D) 540 E) 720

PROBLEMA 46

¿Cuántos números de 3 cifras significativas existen, tales que al restarles su complemento aritmético, dan como diferencia un número de dos cifras?

- A) 30 B) 32 C) 36
D) 40 E) 45

PROBLEMA 47

¿En cuántos sistemas de numeración, existen 42 números de la forma:

$$\left(\frac{a}{3}\right)a(b+2)(3b) \text{ ?}$$

Indique: La base de cada uno de los sistemas de numeración señalados.

- A) 15, 16, 17 B) 16, 17, 18
C) 17, 18, 19 D) 18, 19, 20
E) 19, 20, 21

PROBLEMA 48

¿Cuántos números de 4 cifras tienen por lo menos una cifra 4, tales que elevados al cubo, se obtenga un valor impar?

- A) 810 B) 1260 C) 1620
D) 2610 E) 3200

PROBLEMA 49

¿Cuántos números de 3 cifras tienen por lo menos una cifra impar y que además el producto de sus cifras sea siempre par?

- A) 100 B) 125 C) 250
D) 720 E) 675

PROBLEMA 50

Señale la suma de valores de m , si existen 30 numerales de la forma:

$$mn\left(\frac{m}{3}\right)(3n)\left(\frac{ab}{b}\right)$$

- A) 42 B) 45 C) 18
D) 14 E) 15

PROBLEMA 51

¿Cuántos valores puede formar $\overline{ab}$, si:

$$\frac{121_{(a)}}{100_{(b)}} = \frac{10_{(b)}}{11_{(a)}}$$

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

PROBLEMA 52

Si N es un número capicúa de 9 cifras, del sistema de base 9. ¿Cuántos valores diferentes toma N si la suma de sus cifras es impar?

- A) 13684 B) 16384
C) 23328 D) 29160
E) 29360

PROBLEMA 53

¿Cuántos números de 10 cifras tienen 9 cifras 9 únicamente en su escritura?

- A) 81 B) 82 C) 89
D) 90 E) 91

PROBLEMA 54

¿Cuántos números capicúas de 5 cifras existen, si en su escritura sólo aparecen dos cifras 2?

- A) 90 B) 180 C) 144
D) 153 E) 162

PROBLEMA 55

¿Cuántos números impares de 5 cifras no poseen 4 cifras 7 en su escritura?

- A) 44168 B) 45900 C) 44958
D) 40500 E) 44961

PROBLEMA 56

En el sistema de base 7. ¿Cuántos números capicúas de cinco cifras son impares?

- A) 108 B) 180 C) 147
D) 126 E) 162

PROBLEMA 57

¿En que sistema de numeración existen 231 números capicúas de 5 cifras, en los cuales solamente aparezca 2 veces la cifra 5?

- A) 7 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

PROBLEMA 58

En el sistema heptal. ¿Cuántos números de 4 cifras tienen por lo menos 2 cifras iguales?

- A) 1338 B) 2058 C) 2700
D) 720 E) 1980

PROBLEMA 59

Al permutar n elementos, en los cuales a y b (2 de dichos elementos) no se encuentran juntos, se obtuvo 3600 arreglos diferentes. Halle n

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PROBLEMA 60

¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar 7 personas para tomarse una foto, si 3 de ellos en particular deben de estar ubicados siempre juntos?

- A) 4! B) 5! C) 6!
D) 7! E) 48

PROBLEMA 61

La cantidad de permutaciones de $(n+1)$ objetos tomados de 3 en 3 es el doble del número de permutaciones de n objetos tomados de 2 en 2. Halle n .

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA 62

En el cumpleaños de Laurita ella y 6 de sus amiguitos hacen una ronda alrededor de una pifia. Si Paola siempre se ubica a la derecha de Laurita. ¿De cuántas formas se pueden ubicar los niños en la ronda?

- A) 7! B) 6! C) 5!
D) 4! E) 3!

PROBLEMA 63

¿De cuántas formas se podrán sentar las personas A, B, C, D, E, y F en una mesa circular de 6 asientos de manera que las parejas formadas por A y B, C y D, E y F no se separen.

- A) 6 B) 12 C) 16
D) 60 E) 120

PROBLEMA 64

A una reunión de amigos acuden 5 parejas. ¿De cuántas maneras pueden sentarse alrededor de una mesa redonda, de modo que no queden juntos 2 hombres?

- A) 5! B) 4! C) $(4!)^2$
D) $(5!)^2$ E) $4! \times 5!$

PROBLEMA 65

La cantidad de permutaciones circulares de n objetos, donde A, B y C (tres de los n objetos) no estén juntos es 12. ¿Cuántos objetos están permutando circularmente?

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

PROBLEMA 66

Se dispone de 8 banderas, donde 2 son rojas, 2 son blancas y 4 son azules. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden izar las 8 banderas en un mástil?

- A) 112 B) 240 C) 56
D) 64 E) 420

PROBLEMA 67

Calcular el número de permutaciones que se

puede hacer con las letras de la palabra MATEMATICA, sin necesidad que tenga significado.

- A) $10! / 4!$ B) $10! / 5!$
C) $10! / 3!$ D) $10! / 6!$
E) $10! / 5$

PROBLEMA 68

Sobre una mesa se encuentran 10 tizas de colores diferentes. ¿De cuántas maneras se pueden escoger 3 tizas?

- A) 4! B) 5! C) $4 \times 5!$
D) 6! E) 7!

PROBLEMA 69

Se tiene 2 libros de medicina, 4 de historia y 3 de economía. Se desea formar un grupo de 6 libros de los cuales siempre se encuentre 2 libros de medicina, 2 de historia y 2 de economía. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden formar dichos grupos?

- A) 6 B) 12 C) 18
D) 24 E) 27

PROBLEMA 70

Se desea formar un comité universitario, de 6 miembros, contando con 7 estudiantes de ciencias y 8 de humanidades. ¿De cuántas maneras diferentes puede formarse dicho comité que incluya por lo menos a 2 estudiantes de humanidades?

- A) 5040 B) 3480 C) 4380
D) 4600 E) 4830

PROBLEMA 71

José posee 25 conejos y 10 cuyes, desea regalar 8 animales en los cuales haya 5 conejos y el resto sean cuyes. ¿De cuántas maneras diferentes podrá escoger dichos animales?

- A) $\frac{25!}{20!}$ B) $\frac{24!}{20!}$ C) $\frac{25!}{10!}$
D) 8! E) 10!

PROBLEMA 72

7 electricistas y 5 gasfiteros van a conformar comites de 4 personas. ¿De cuántas maneras diferentes puede formarse, si por lo menos hay un gasfitero y un electricista?

- A) 460 B) 455 C) 445
D) 495 E) 490

PROBLEMA 73

¿Cuántos números desde 1 hasta 2187 inclusive, pueden ser escritos como la suma de dos o más potencias diferentes de 3?

- A) 63 B) 127 C) 128
D) 64 E) 255

PROBLEMA 74

En una reunión al saludarse todos los asistentes entre sí, se contó 210 apretones de mano. ¿Cuántos asistentes hubo en la reunión?

- A) 17 B) 20 C) 21
D) 22 E) 42

PROBLEMA 75

¿Cuántas sumas diferentes de 3 sumandos cada uno, se pueden obtener con los números 11, 12, 13, 14 y 15?

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 10 E) 12

PROBLEMA 76

Un reservorio puede ser llenado por 5 caños cuyos caudales son 10, 20, 24, 25 y 30 litros por minuto. Abriendo indistintamente 3 caños. ¿En cuántos tiempos diferentes se puede llenar el reservorio?

- A) 10 B) 5 C) 8
D) 9 E) 15

PROBLEMA 77

Carlos trabaja en una tienda de regalos. Desea colocar 10 vasos en una vitrina, para ello debe escoger 9 vasos grandes de una caja de 12 unidades iguales y un vaso pequeño de una caja de 20 unidades iguales. ¿De cuántas formas diferentes puede escoger los vasos y colocarlos ordenadamente en la vitrina?

- A) 2200 B) 4400 C) 22000
D) 44000 E) 24000

PROBLEMA 78

Con 6 pesas diferentes de 0;10, 0;40, 0;80, 1;60, 3;20 y 6;40 kg. ¿Cuántas pesadas diferentes pueden obtenerse?

- A) 32 B) 63 C) 64
D) 127 E) 128

PROBLEMA 79

Cierto compuesto se forma al mezclar 5 elementos de 8 diferentes que se tiene. Para comprobar que el compuesto sea el mejor, se dispone observar las reacciones al cambiar el

orden en que son mezclados los 5 elementos. ¿De cuántas maneras pueden realizarse las pruebas señaladas?

- A) 120 B) 720
C) 6720 D) 1200
E) 6200

PROBLEMA 80

¿De cuántas maneras se puede distribuir 7 monedas de diferente valor en 2 monederos distintos de modo que ninguno este vacío?

- A) 7 B) 7! C) 6
D) 6! E) 24

PROBLEMA 81

En una evaluación de personal, un empleado debe de contestar un cuestionario de 8 preguntas, siendo de ellas 2 opcionales. Si obligatoriamente debe contestar 3 de las 4 primeras. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

- A) 20 B) 40 C) 16
D) 32 E) 24

PROBLEMA 82

Se quiere formar comisiones integradas por 4 personas, de un grupo de 4 hombres y 4 mujeres. Si además 2 hombres no desean estar en la misma comisión a menos que este integrada por lo menos por una mujer. ¿Cuántas comisiones diferentes se pueden formar?

- A) 64 B) 68
C) 69 D) 70
E) 72

PROBLEMA 83

5 personas se desean dividir en 2 grupos de 2 personas y 3 personas de modo que cada grupo haga su fogata y sus integrantes se sienten alrededor de ellas. Calcular de cuántas formas se pueden ubicar.

- A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 18

PROBLEMA 84

¿Cuántos números de 3 cifras diferentes existen, tales que la cifra 2 y 3 no aparezcan juntas?

- A) 610 B) 604 C) 402
D) 602 E) 801

PROBLEMA 85

Se tienen 4 cajas. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden distribuir 3 objetos M, N, y P en las cajas?. Puede ser que alguno de ellos coincidan en la misma caja.

- A) 64 B) 70
C) 72 D) 81
E) 120

PROBLEMA 86

Una urna contiene cuatro fichas numeradas 2, 3, 5 y 9; una segunda urna contiene las siguientes fichas: 1, 4, 6, 7 y 8. Sea el experimento

aleatorio $\mathcal{E}$ que consiste en extraer una ficha de la primera urna y dos fichas de la segunda. ¿Cuántos elementos posee el evento designado como: "la suma de las dos últimas fichas (considerando el orden) más la primera ficha sumen un valor par"?

- A) 32 B) 36 C) 44
D) 50 E) 60

PROBLEMA 87

Se lanza una moneda 4 veces. ¿Cuántos elementos posee el evento A?

- A: "El segundo y cuarto lanzamiento resultan diferentes"
A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) 10

PROBLEMA 88

Se lanza una moneda n veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara al menos una vez en los n lanzamientos?

- A) $1/2$ B) $(1/2)^n$ C) $(2/3)^n$
D) $1 - (2/3)^n$ E) $1 - (1/2)^n$

PROBLEMA 89

Dado un conjunto A , la probabilidad de que al escoger al azar uno de sus subconjuntos, éste resulte ternario, es 0,3128. ¿Cuántos subconjuntos binarios posee?

- A) 10 B) 15 C) 28
D) 36 E) 6

PROBLEMA 90

Se elige un comité de 6 personas de un grupo de 4 hombres y 4 mujeres. Calcular la probabilidad de que en dicho comité haya al menos 3 mujeres.

- A) $2/7$ B) $3/7$ C) $4/7$
D) $11/14$ E) $5/14$

PROBLEMA 91

Se desea escribir todas las palabras posibles de 10 letras, empleando todas las letras de la palabra MATEMATICA. Calcular la probabilidad de que las letras **E** y **C** estén en los extremos.

- A) $7/60$ B) $4/11$ C) $1/13$
D) $4/61$ E) $1/45$

PROBLEMA 92

Se tiene 4 cajas numeradas del 1 al 4 y 4 bolas numeradas del 2 al 5. Se distribuyen aleatoriamente las bolas, una en cada caja. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la caja coincida con el número de la bola que contiene?

- A) 0,1875 B) 0,25
C) 0,2475 D) 0,1785
E) 0,2745

PROBLEMA 93

Se escoge al azar un número de 10 cifras que suman 88. Calcular la probabilidad de que el número obtenido sea impar.

- A) $9/11$ B) $46/55$
C) $9/55$ D) $4/55$
E) $6/55$

PROBLEMA 94

Una caja contiene 6 bolas azules y 3 bolas blancas. Se lanza un dado y se extrae de la caja tantas bolas como indique el puntaje obtenido en el dado. Calcular la probabilidad de que todas sean azules.

- A) 20% B) 25% C) 12%
D) 16% E) 30%

PROBLEMA 95

Doris decide invitar a 4 ó 5 de sus amigas a una cena. Calcular la probabilidad de hacer una invitación en la que Ana y Betty (dos de las 6 amigas que puede invitar) no se encuentren a la vez en la misma cena.

- A) $3/5$ B) $1/3$
C) $14/15$ D) $9/15$
E) $2/3$

PROBLEMA 96

Carlos compra 3 gallinas, de 10 que hay en una granja, y de estas últimas hay 4 que son jóvenes. ¿Cuál es la probabilidad de que haya comprado 2 gallinas jóvenes?

- A) 10% B) 15% C) 30%
D) 25% E) 20%

PROBLEMA 97

De los 50 primeros números enteros positivos se desea escoger aleatoriamente un número. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una cantidad par de divisores?

- A) 12% B) 14% C) 16%
D) 18% E) 20%

PROBLEMA 98

Ana y su esposo asisten a un baile encontrando a sus hermanos Beto y Carlos con sus respectivas esposas y en cierto momento deciden bailar todos los asistentes. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana baile con uno de sus

hermanos y su esposo baile con la esposa de ese hermano?

- A) $1/3$ B) $1/2$ C) $2/3$
D) $1/6$ E) $3/5$

PROBLEMA 99

Se escriben todos los números de 3 cifras. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger uno de estos números al azar, resulte un valor que dividido entre 2, 3 y 7 deja el mismo residuo?

- A) 2,3% B) 2% C) 3%
D) 3,2% E) 3,2%

PROBLEMA 100

En cierta clase hay 15 alumnos antiguos, de los cuales 10 son muchachos. Si en la clase hay 15 muchachos nuevos y 30 muchachas. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger 2 alumnos, al azar, estos sean un muchacho y una muchacha?

- A) $5/11$ B) $50/99$
C) $45/98$ D) $45/110$
E) $7/22$

PROBLEMA 101

Carlos dispone de 12 libros diferentes: 5 de historia, 4 de matemática y 3 de lenguaje. Un día distraídamente coge 2 libros y se dirige a la universidad. ¿Cuál es la probabilidad de que haya tomado los libros de una misma materia ó que ninguno de ellos sea de lenguaje?

- A) $12/15$ B) $19/45$ C) $4/9$
D) $13/15$ E) $2/3$

PROBLEMA 102

De una baraja de 52 cartas, se extraen al azar 5 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga 3 cartas del mismo valor?

- A) $141/833$ B) $94/833$ C) $49/49$
D) $94/4165$ E) $49/833$

PROBLEMA 103

En una empresa hay 15 oficinas de administración, de las cuales 9 poseen cada una, un sistema de fotocopiado y las restantes no. Un supervisor debe acercarse a 3 oficinas diferentes. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 de dichas oficinas cuenten con el sistema de fotocopiado?

- A) $60/91$ B) $2/3$
C) $15/23$ D) $5/7$
E) $9/13$

PROBLEMA 104

De los números de 3 cifras. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger un número, este no sea dividido exactamente por 8 o no acabe en cifra 5 o acabe en cifra significativa?

- A) $73/90$ B) $269/900$ C) $631/900$
D) $7/9$ E) $97/300$

PROBLEMA 105

Si $2^k!$ tiene n divisores. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger uno de ellos, éste resulte impar?

- A) 2^{1-k} B) 2^{-k} C) $n/k!$
D) $2/k!$ E) Indeterminado

PROBLEMA 106

4 monedas de 5 soles pueden ser guardadas en 3 monederos diferentes. ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer monedero haya 10 soles?

- A) 12/21 B) 7/23 C) 1/25
D) 12/13 E) 1/27

PROBLEMA 107

Se escriben los números impares de dos cifras y se escogen 2 números aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que dichos números sean divididos exactamente por la suma de sus cifras?

- A) 10% B) 8% C) 6%
D) 7% E) 9%

PROBLEMA 108

A las caras de un tetraedro regular se le asigna los valores de 1, 2, 3 y 4 respectivamente. Este poliedro al ser lanzado y luego detenerse, muestra 3 caras que señalan sus valores respectivos siendo S la suma de dichos valores. ¿Cuál es la probabilidad de que S sea 7, al menos una vez en "n" lanzamientos?

- A) $1 - (3/4)^n$ B) $1 - 2^n$ C) $1/4$
D) $\frac{2^n - 1}{2^n + 1}$ E) $(3/4)^n$

PROBLEMA 109

Cuatro personas se sientan alrededor de una mesa redonda al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas en particular no ocupen lugares continuos?

- A) 1/2 B) 1/3
C) 2/3 D) 1/4
E) 3/4

PROBLEMA 110

Se compran 3 refrescos en una tienda que ofrece 3 sabores A, B y C. ¿Cuál es la probabilidad de que al efectuarse el pedido, ninguno de los refrescos tenga el sabor A?

- A) 1/2 B) 1/3
C) 2/3 D) 3/4
E) 1/4

PROBLEMA 111

Dos jugadores A y B lanzan una moneda. Si sale dos veces seguidas cara gana A, y si sale dos veces seguidas sello gana B. Señale la probabilidad de que se necesite un número impar de lanzamientos para terminar el juego.

- A) 1/2 B) 1/4 C) 1/3
D) 2/3 E) 3/4

PROBLEMA 112

Para 2 eventos A y B, que no son mutuamente excluyentes, se conoce:

$$P_{[A]} = 0,3$$

$$P_{[B]} = 0,2$$

$$P_{[A \cap B]} = 0,9$$

Señale $P_{[A \cup B]}$

- A) 0,3 B) 0,7 C) 0,1
D) 0,9 E) N.A.

PROBLEMA 113

Un dado está numerado con 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Cada cara tiene la misma posibilidad de salir en un lanzamiento. Si se tira este dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par o un valor mayor a 5?

- A) 2/3 B) 1/2 C) 1/3
D) 1/6 E) 3/4

PROBLEMA 114

Sean A y B dos eventos independientes. Se sabe que la probabilidad de que suceda al menos uno de ellos es 0,82 y la probabilidad de que no ocurra B es 0,3. Calcular la probabilidad de que no ocurra A.

- A) 0,4 B) 0,5 C) 0,6
D) 0,7 E) 0,8

PROBLEMA 115

9 estudiantes, de los cuales 4 estudian física, 3 historia y 2 literatura, forman una cola delante de una oficina para recibir su carnet. Si están formados aleatoriamente. Hallar la probabilidad de que los alumnos de una misma especialidad estén juntos.

- A) 2/7 B) 3/4 C) 1/9
D) 1/63 E) 4/21

PROBLEMA 116

En un laboratorio se encuentran 60 muestras de las cuales se conoce que 22 están contaminadas y las restantes no lo están. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger al azar 6 muestras, se encuentre una sola contaminada?

- A) 0,45 B) 0,32 C) 0,16
D) 0,22 E) 0,75

PROBLEMA 117

Se premia a los 5 mejores alumnos de un salón de clases; Ana, Beto, César, Delia y Ernesto. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana ocupe un mejor puesto que Ernesto, si no hubo empate en la premiación?

- A) 0,3 B) 0,4 C) 0,5
D) 0,6 E) 0,7

PROBLEMA 118

3 hombres suben a un ascensor que los puede llevar a 10 pisos diferentes. ¿Cuál es la probabilidad de que los hombres bajen en diferentes pisos?

- A) 89,9% B) 92% C) 10%
D) 101,1% E) 8%

PROBLEMA 119

En una bolsa hay 10 caramelos y 5 chocolates. Se sacan 3 dulces al azar de la bolsa, uno a uno. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros sean caramelos y el último sea chocolate?

- A) 15/17 B) 13/15
C) 21/43 D) 15/91
E) 45/91

PROBLEMA 120

Un equipo de fútbol A tiene la probabilidad de ganar a un equipo B, teniendo las apuestas 3:2 a su favor. Si se enfrentan dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que A gane por lo

menos uno de dos partidos, si no hay empate?

- A) 24% B) 32% C) 64%
D) 84% E) 90%

PROBLEMA 121

A un seminario asisten ingenieros y arquitectos, se sabe que hay tantos hombres como mujeres y que el 50% de las mujeres son arquitectas. Se escoge una persona al azar, resultando mujer. ¿Cuál es la probabilidad de que sea ingeniera?

- A) $1/2$ B) $1/4$ C) $1/3$
D) $3/4$ E) $2/3$

PROBLEMA 122

La probabilidad de que José vaya al cine es 0,2, mientras que la probabilidad de que no tome taxi al salir es 0,3 y la probabilidad de que no vaya al cine y no tome taxi es 0,25. Señale la probabilidad de que José tome un taxi y vaya al cine.

- A) 0,05 B) 0,10 C) 0,15
D) 0,20 E) 0,50

PROBLEMA 123

A una reunión asisten 36 muchachos y 24 chicas, la tercera parte de los muchachos ha llegado temprano y un número igual de chicas ha llegado tarde. Se elige una persona al azar y se observa que ha llegado temprano. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una chica?

- A) $1/3$ B) $2/3$ C) $3/4$
D) $2/5$ E) $1/2$

PROBLEMA 124

Se encuesta a 80 personas sobre la práctica al deporte con los siguientes resultados: 50 juegan fútbol, 40 practican natación y 10 no practican ni fútbol, ni natación. Si se escoge una persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sólo practique natación?

- A) 0,20 B) 0,25 C) 0,28
D) 0,30 E) 0,37

PROBLEMA 125

La probabilidad de que un automóvil tenga un accidente en "m" kilómetros de recorrido es "P". Señale la probabilidad de que dicho automóvil no sufra accidente en "3 m" kilómetros.

- A) P^3 B) $(1 - P)^3$
C) $1 - P^3$ D) $1 - (1 - P)^3$
E) $1 - (1 - P^3)^3$

PROBLEMA 126

Si se lanzan 3 monedas y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 2 caras con las monedas y un puntaje par en el dado?

- A) $3/16$ B) $2/9$ C) $1/3$
D) $5/16$ E) $1/2$

PROBLEMA 127

Dos bolsas contienen cada una 8 bolas en una son blancas y en la otra negras. Se toman 4 bolas de la primera y 2 bolas de la otra, echándose las bolas de la primera en la segunda bolsa y viceversa. Si se extrae al azar una bola

de cada bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de diferente color?

- A) $1/2$ B) $8/15$ C) $3/16$
D) $7/15$ E) $13/16$

PROBLEMA 128

De un grupo de personas se obtuvo la siguiente información: la probabilidad de que una persona fume es del 30%, mientras que la probabilidad de que beba es de 20% y de que no beba ni fume es del 5%. Si al escoger a una persona al azar, resulta que fuma. ¿Cuál es la probabilidad de que no beba?

- A) 50% B) 15% C) 25%
D) 35% E) 65%

PROBLEMA 129

Se evaluó a un grupo de 100 alumnos en los cursos de Psicología, Filosofía y Lógica, observándose que si aprobaron Filosofía ó Lógica

no aprobaron Psicología, además todos aprobaron por lo menos un curso, 30 hombres aprobaron Filosofía y Lógica, 46 mujeres rindieron los 3 exámenes y 42 alumnos aprobaron Psicología. Al escoger un alumno al azar resulta mujer. ¿Qué probabilidad tiene de no haber aprobado Psicología?

- A) 0,24 B) 0,18 C) 0,30
D) 0,28 E) 0,60

PROBLEMA 130

En un mostrador hay 10 objetos diferentes, 5 cuestan 42 soles cada uno, 3 cuestan 84 soles cada uno y los dos restantes cuestan 100 soles cada uno. Se escoge aleatoriamente 3 objetos. Determine la probabilidad de que al menos 2 de los objetos tengan el mismo precio.

- A) $3/4$ B) $7/24$ C) $1/4$
D) $17/24$ E) $4/7$



CLAVES

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. C
2. D
3. A
4. E
5. C
6. E
7. D
8. E
9. D
10. D
11. C
12. E
13. E
14. C
15. E
16. D
17. E
18. C
19. C
20. B
21. C
22. C
23. D
24. E
25. B
26. C

27. A
28. A
29. B
30. D
31. D
32. A
33. E
34. E
35. C
36. B
37. C
38. E
39. B
40. B
41. D
42. A
43. A
44. D
45. C
46. C
47. E
48. B
49. E
50. B
51. C
52. C

53. C
54. D
55. E
56. D
57. D
58. A
59. C
60. C
61. C
62. C
63. C
64. C
65. C
66. E
67. A
68. B
69. C
70. E
71. A
72. B
73. C
74. C
75. C
76. A
77. D
78. B

79. C
80. C
81. B
82. C
83. C
84. A
85. A
86. C
87. C
88. E
89. A
90. D
91. E
92. A
93. B
94. B
95. C
96. C
97. B
98. A
99. A
100. B
101. D
102. D
103. A
104. D

105. B
106. E
107. A
108. A
109. B
110. B
111. C
112. E
113. A
114. C
115. A
116. A
117. C
118. A
119. D
120. D
121. A
122. C
123. E
124. B
125. B
126. A
127. B
128. A
129. E
130. A



ARITMÉTICA

Teoría y Problemas

ES

INFORMES Y VENTAS

Av. Alfonso Ugarte N°1310 2do. Piso Of. 212

☎ 423-8154